

# **La Navegación Astronómica. Método por Rectas Diferenciométricas Tangentes y Método de Dowes**

**Trabajo Final de Grado**



Facultad de Náutica de Barcelona  
Universidad Politécnica de Catalunya

Trabajo realizado por:  
**Joan Mateu Castañer**

Dirigido por:  
**Agustí Martí Mallofre**

Grado en Náutica y Transporte Marítimo

Barcelona, 06/04/2018









---

# Agradecimientos

En primer lugar, agradecer a Sergi Moyano, mi profesor de la asignatura de Navegación Astronómica, por conseguir que me apasionara su asignatura y despertarme el interés por esta materia y la curiosidad por saber más sobre ella.

Agradecer a la tripulación del B/O Sarmiento de Gamboa y, en especial a su segundo oficial Luis Ansorena Baltasar quien me enseñó gran parte de lo que he ilustrado en este trabajo, me enseñó a utilizar el sextante, avivó aún más mi interés por esta materia y me dio ideas para la realización del presente proyecto. Sin su aportación y sus enseñanzas no hubiese sido capaz de realizarlo.

## Resumen

La navegación astronómica ha sido y es una herramienta elemental para los marinos. Debido a los modernos sistemas de ayuda a la navegación ha quedado relegada a un segundo plano pero es imprescindible su conservación, bien sea como una herramienta de emergencia o simplemente como parte de la cultura marítima de los navegantes.

El presente trabajo hace un repaso de los fundamentos y los conceptos básicos de la navegación astronómica y de la teoría del sextante, explicando también los diferentes ajustes que se le hacen al sextante para su correcto funcionamiento y la importancia de estos.

A continuación se resuelven una serie de ejercicios realizados durante las navegaciones oceánicas por medio de 3 métodos distintos: el método de rectas de altura tradicional Saint Hilaire, el método por rectas diferenciométricas tangentes y el método de Dowes. Cada uno de ellos se trata detenidamente con un ejercicio explicativo y se incluyen 4 ejercicios resueltos.

Por último se realiza un análisis de los resultados obtenidos y una comparación de los diferentes métodos. Se concluye con que, si bien cualquiera de los métodos es perfectamente válido, la mejor precisión la obtendremos con el método de las rectas diferenciométricas tangentes, ya que fue ideado con el fin de reducir los errores al mínimo. El método menos preciso es el método de Dowes, pero tiene la ventaja de que no requiere una situación de estima previa.

---

# Abstract

The astronomical navigation has been and is an elementary tool for sailors. Owing to the modern navigation aid systems, it has been relegated to the background but its preservation is essential, either as an emergency tool or simply as part of the maritime culture of the navigators.

This paper reviews the fundamentals and basic concepts of astronomical navigation and sextant theory, while explaining the different adjustments that are made to the sextant for its proper functioning and the importance of such adjustments.

Next, a series of exercises performed during the ocean voyages are solved by means of 3 different methods: the Saint Hilaire traditional height line method, the tangent differential line method and the Doves method. Each one of them is treated with an explanatory exercise and 4 exercises are included.

Finally, an analysis of the results obtained and a comparison between the different methods is carried out. We conclude that, although any of the methods is perfectly valid, the best precision will be obtained with the tangent differential-line method, since it was designed with the aim of reducing errors to a minimum. The least accurate method is the Doves method, but it has the advantage that it does not require a prior estimation situation.

# Tabla de contenidos

AGRADECIMIENTOS	III
RESUMEN	IV
ABSTRACT	V
TABLA DE CONTENIDOS	VI
LISTA DE FIGURAS	VIII
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 2. FUNDAMENTOS DE LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA</b>	<b>3</b>
<b>CAPÍTULO 3. EL SEXTANTE</b>	<b>7</b>
3.1 PARTES DEL SEXTANTE	7
3.2 FUNCIONAMIENTO DEL SEXTANTE	8
3.3 AJUSTES DEL SEXTANTE PREVIOS AL USO	9
3.3.1. AJUSTE DEL ESPEJO DE ÍNDICE	10
3.3.2 AJUSTE DEL ESPEJO DE HORIZONTE	10
3.3.3 ELIMINACIÓN DEL ERROR DE ÍNDICE	11
3.3.4 COMPROBACIÓN DEL AJUSTE	11
3.4 CORRECCIONES A LA ALTURA INSTRUMENTAL	11
3.4.1 CORRECCIÓN POR DEPRESIÓN DEL HORIZONTE	12
3.4.2 CORRECCIÓN POR REFRACCIÓN	12
3.4.3 CORRECCIÓN POR SEMIDIÁMETRO	13
3.4.4 CORRECCIÓN POR PARALAJE	13
<b>CAPÍTULO 4. CONCEPTOS BÁSICOS DE LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA</b>	<b>15</b>
4.1 COORDENADAS DE LOS ASTROS	15
4.1.1 COORDENADAS RESPECTO A LA TIERRA	15
4.1.2 COORDENADAS RESPECTO AL OBSERVADOR	16
4.2 TRIÁNGULO DE POSICIÓN	18
4.3 RECTAS DE ALTURA	20
4.3.1 ERRORES DERIVADOS DE LA RECTA DE ALTURA	21
4.4 BISECTRICES DE ALTURA	23
<b>CAPÍTULO 5. MÉTODO DE TANGENTES DE RECTAS DE ALTURA TRADICIONAL</b>	<b>27</b>
5.1 EJERCICIO EXPLICATIVO	28
5.2 EJERCICIO 1	32
5.3 EJERCICIO 2	35

---

5.4 EJERCICIO 3	38
5.5 EJERCICIO 4	41
5.6 EJERCICIO 5	44
<b>CAPÍTULO 6. MÉTODO POR RECTAS DIFERENCIOMÉTRICAS TANGENTES</b>	<b>47</b>
6.1 EJERCICIO EXPLICATIVO	48
6.2 EJERCICIO 1	51
6.3 EJERCICIO 2	53
6.4 EJERCICIO 3	55
6.5 EJERCICIO 4	57
6.6 EJERCICIO 5	59
<b>CAPÍTULO 7. MÉTODO DE DOWES</b>	<b>61</b>
7.1 EJERCICIO EXPLICATIVO	62
7.2 EJERCICIO 1	65
7.3 EJERCICIO 2	67
7.4 EJERCICIO 3	69
7.5 EJERCICIO 4	71
7.6 EJERCICIO 5	73
<b>CAPÍTULO 8. COMPARATIVA Y CONCLUSIONES</b>	<b>75</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>77</b>

---

# Lista de Figuras

Figura 1. Circunferencia de alturas iguales .....	3
Figura 2. Intersección de 2 circunferencias de alturas iguales.....	4
Figura 3. Composición de la recta de altura .....	6
Figura 4. Partes del sextante .....	7
Figura 5. Sistema de espejos del sextante    Figura 6. Tangenteo del astro observado .....	8
Figura 7. Error de índice.....	9
Figura 8. Vista del horizonte con error de índice .....	9
Figura 9. Colocación alidada para corrección del error .....	10
Figura 10. Salto de la imagen durante la corrección .....	11
Figura 11. Balanceo del sextante.....	11
Figura 12. Correcciones a la altura observada .....	12
Figura 13. Declinación y co-declinación de un astro .....	15
Figura 14. Horario de Greenwich de un astro .....	16
Figura 15. Horario del lugar del astro    Figura 16. Polo del astro .....	16
Figura 17. Meridiano inferior del lugar    Figura 18. Meridiano superior del lugar.....	17
Figura 19. Altura verdadera    Figura 20. Distancia zenital .....	17
Figura 21. Azimut náutico    Figura 22. Azimut astronómico .....	18
Figura 23. Triangulo de posición.....	19
Figura 24. Composición de la circunferencia de alturas iguales respecto a la s/e .....	20
Figura 25. Zonas de posición derivada de los errores.....	22
Figura 26. Bisectriz de altura .....	23
Figura 27. Método de las Bisectrices de altura con 3 rectas de altura .....	25
Figura 28. Resolución gráfica del ejercicio por el método tradicional Saint Hilaire .....	31
Figura 29. Resolución gráfica del ejercicio 1 por el método tradicional Saint Hilaire .....	34
Figura 30. Resolución gráfica del ejercicio 2 por el método tradicional Saint Hilaire .....	37
Figura 31. Resolución gráfica del ejercicio 3 por el método tradicional Saint Hilaire .....	40
Figura 32. Resolución gráfica del ejercicio 4 por el método tradicional Saint Hilaire .....	43
Figura 33. Resolución gráfica del ejercicio 5 por el método tradicional Saint Hilaire .....	46
Figura 34. Resolución gráfica del ejercicio por rectas diferenciométricas.....	50
Figura 35. Resolución gráfica del ejercicio 1 por rectas diferenciométricas.....	52

---

Figura 36. Resolución gráfica del ejercicio 2 por rectas diferenciométricas.....	54
Figura 37. Resolución gráfica del ejercicio 3 por rectas diferenciométricas.....	56
Figura 38. Resolución gráfica del ejercicio 4 por rectas diferenciométricas.....	58
Figura 39. Resolución gráfica del ejercicio 5 por rectas diferenciométricas.....	60
Figura 40. Teorema del coseno .....	61
Figura 41. Esquema para su resolución con el método de Dowes .....	64
Figura 42. Esquema para la resolución del ejercicio 1 con el método de Dowes .....	66
Figura 43. Esquema para la resolución del ejercicio 2 con el método de Dowes .....	68
Figura 44. Esquema para la resolución del ejercicio 3 con el método de Dowes .....	70
Figura 45. Esquema para la resolución del ejercicio 4 con el método de Dowes .....	72
Figura 46. Esquema para la resolución del ejercicio 5 con el método de Dowes .....	74





## Capítulo 1. Introducción

Desde que el hombre empezó a navegar surgió la necesidad de ubicarse durante las travesías para llegar sanos y salvos a su destino. Para ello se necesita una referencia, un punto en el que fijarnos y establecer una relación entre nuestra posición y el mismo. Cuando nos alejamos de la costa y esta deja de verse, nuestro único punto donde tomar referencias son los astros.

Es de ahí de donde surge la navegación astronómica, perfeccionada durante cientos de años, y herramienta que ha permitido las navegaciones oceánicas que han logrado el progreso del comercio a nivel mundial. Bien es cierto que esta herramienta, ahora que ha llegado a su cenit y tenemos todos los medios necesarios para hacerla con total precisión, ya no es una herramienta imprescindible. Y es gracias a esa tecnología que nos ha permitido su perfeccionamiento el motivo por el cual ya no la necesitamos, si bien siempre estará presente en los buques como medio de posicionamiento de apoyo o de emergencia o simplemente para el disfrute de a quienes les apasione.

Este proyecto surgió con la idea de comparar diferentes métodos existentes en la navegación astronómica. Para ello, durante la navegación oceánica a la altura de las islas de Cabo Verde, se realizaron una serie de ejercicios utilizando estos tres métodos: tangentes de rectas de altura Saint Hilaire; el método que se ha usado tradicionalmente, el método de las rectas diferenciométricas y el método de Doves. Estos métodos serán explicados detenidamente para su comprensión, elaborando además unas plantillas que el lector puede usar para la metodología de resolución. Posteriormente se comparan los resultados y se analizará la precisión de cada método y que uso se le puede dar a cada uno de ellos.

Para todo ello se realiza previamente un repaso de los conceptos fundamentales de la navegación astronómica. Además también se verá el funcionamiento y las partes del sextante, así como los ajustes necesarios para su correcto funcionamiento.

Con todo esto se pretende analizar diferentes opciones que hay a la hora de resolver los ejercicios de navegación astronómica y comprar estos métodos y sus resultados.



## Capítulo 2. Fundamentos de la Navegación Astronómica

El principio fundamental de esta materia es el de que un observador de la bóveda celeste ubicado en la tierra en un instante concreto tiene una visión única del cielo para esa posición determinada. Es decir, solo él, por estar en esa situación, ve las estrellas con esa ubicación en el firmamento y con unas coordenadas determinadas respecto al horizonte.

Para obtener nuestra ubicación primero debemos posicionar el astro que estamos observando, y lo vamos a hacer respecto a dos puntos:

- Coordenadas respecto a la tierra: estas coordenadas, que se estudiarán más adelante, son ya conocidas de antemano por el observador, ya que están calculadas y tabuladas para cada instante del día de un año concreto en el Almanaque Náutico. Así pues, no necesitamos saber más que la hora UTC en la que nos encontramos (eso sí, con muy buena precisión) para tener las coordenadas del astro respecto a la tierra.
- Coordenadas respecto al observador: estas son las que tenemos que medir nosotros. Lo haremos con la ayuda de dos instrumentos de los que se hablará más adelante: la alidada y el sextante. Estas consisten en la altura del astro sobre el horizonte y el arco de horizonte respecto al punto cardinal Norte.

Cuando un astro ilumina la superficie terrestre, este puede ser visto en cualquier zona de iluminación con una infinidad de alturas sobre el horizonte. No obstante, desde puntos muy alejados del plantea, podemos ver el mismo astro con la misma altura, como se puede ver en la *figura 1*. Si dibujásemos sobre la tierra esos infinitos puntos que ven el astro con esa misma altura, obtendríamos una circunferencia. Es la denominada circunferencia de alturas iguales, y este es un concepto básico para la navegación astronómica. Por tanto, por el simple hecho de ver un astro con una altura determinada, ya sabemos que estamos situados sobre cualquier punto de esa circunferencia. La única diferencia entre estos distintos observadores, es hacia donde tiene que mirar para ver el astro, es decir, al arco de horizonte respecto a un punto, que se establece como el punto cardinal Norte. Esto no es más que una demora del astro y es conocido como el Azimut. Para grandes distancias entre observadores dentro de la circunferencia, el Azimut varía notablemente, pero para distancias cortas, la diferencia será inapreciable.

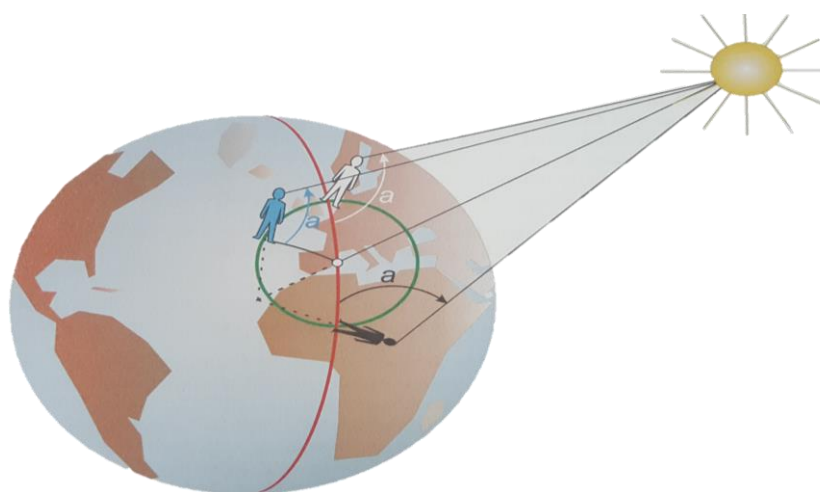


Figura 1. Circunferencia de alturas iguales (Mederos, Luis. *Navegación Astronómica*)

Sabemos entonces que estamos sobre esa circunferencia, pero hay un número infinito de posiciones, por tanto, es fácil deducir que necesitamos otra circunferencia, referenciada a otro astro, para obtener un punto. Si bien es cierto que esa circunferencia en realidad nos dará 2 intersecciones y, por tanto, 2 posiciones, no será tarea difícil descartar una si tenemos una leve idea de donde estamos, ya que serán dos puntos sumamente lejanos. No obstante, esta problemática es tan sencilla de solventar como interseccionando una tercera circunferencia para descartar un punto.

La idea más sencilla para ubicarnos sería la de dibujar sobre un globo terráqueo estas circunferencias. No obstante, esto no es posible dado al tamaño de las mismas. Para obtener suficiente precisión y poder apreciar el valor de 1 milla necesitaríamos un globo de 7 metros de diámetro. Si queremos pintarlo sobre una carta esta debería ser de punto menor, lo cual tampoco sería de utilidad. Por tanto, lo que necesitamos para ubicarnos es solamente una pequeña porción de estas circunferencias.



Figura 2. Intersección de 2 circunferencias de alturas iguales (Mederos, Luis. *Navegación Astronómica*)

La metodología utilizada para ello no es la de trazar la circunferencia respecto a su centro (el polo de iluminación del astro) dato que conocemos ya que el Almanaque Náutico nos da las coordenadas del astro respecto a la tierra, y su radio (la distancia cenital, la cual ya trataremos más adelante).

En realidad, no consiste exactamente en conseguir nuestra ubicación a ciegas, sino que partimos de una posición estimada que obtenemos mediante los cálculos tradicionales de navegación por estima y que corregiremos para obtener la real (situación observada).

Los conceptos claves que debemos tener en cuenta para obtener nuestra posición son 4: situación estimada, altura verdadera, altura estimada y situación observada; este último es el dato a resolver.

Así pues, ya tenemos el primer dato que necesitaremos para el cálculo: una situación de estima que hemos ido calculando durante toda la navegación. Tomamos las coordenadas del astro con ayuda del sextante y la alidada: altura sobre el horizonte y azimuth. Con esto, podemos introducir el segundo dato: la altura verdadera. Como su nombre indica, es la altura del astro en la posición en la que realmente nos encontramos, que es la situación observada, el tercer dato. En la *figura 3* se ha trazado nuestra circunferencia de alturas iguales, que al ser un pedazo tan pequeño de este lo que necesitamos, podemos considerarlo una recta la cual se ha exagerado su tamaño para visualizarlo claramente. Esta recta es la que denominamos recta de altura. Por tanto vemos que nuestra situación de estima no está sobre la recta de altura, pero si la estima es buena, estará a una distancia próxima.

La medida del azimuth que hemos tomado representa la dirección hacia la que miramos para ver nuestro astro, y en el dibujo es el polo de iluminación del astro. Al ser este el centro de la circunferencia, y la recta de altura poderse considerar tangente a la circunferencia (por ser un pedazo sumamente pequeño de ella), este azimuth será perpendicular a la recta de altura. Además, al ser el radio de la circunferencia de miles de millas y nuestra situación de estima no difiere más que una pocas décimas de milla, como mucho, podemos considerar el azimuth de la situación estimada y de la situación observada el mismo. Así que ambas posiciones están sobre la línea del azimuth. Por tanto, si tuviéramos la altura real de la situación estimada (lo que viene a ser la altura estimada) podríamos calcular la distancia entre la situación de estima y la recta de altura, ya que esta vendría dada por  $\Delta a = a_v - a_e$ . Ahora que hemos podido ubicarnos sobre la recta de altura, solo necesitamos interseccionar otra para obtener nuestra posición. Este nuevo punto ubicado sobre la recta de altura se conoce como punto aproximado.

El único dato que nos faltaría para eso, por tanto, es la altura estimada del astro. Teniendo en cuenta, como ya he mencionado, que esta no es más que la altura real de la situación estimada, podemos sacarla gracias al Almanaque Náutico. Con las coordenadas del astro respecto a la tierra que este nos da, y las coordenadas del observador respecto a la tierra (la situación estimada), podemos calcular las coordenadas del astro respecto al observador, resolviendo un triángulo esférico (el triángulo de posición) cuyos elementos estudiaremos más adelante. Estas coordenadas serán la altura estimada que buscamos y el azimuth, que será prácticamente idéntico al tomado anteriormente con la alidada.

En conclusión, el ejercicio se reduce a obtener mediante un cálculo, la altura del astro en la situación estimada y medir la altura real de éste donde nos encontramos y, comparando estos 3 datos, obtener el cuarto, el que buscamos, que es la situación observada. Esto hay que hacerlo con al menos 2 astros para tener una o varias intersecciones de rectas de altura.

Todos estos conceptos básicos, como veremos, pertenecen mayormente al método tradicional de cálculos de navegación astronómica, el más conocido y el que lleva usándose siglos. En este trabajo se tratan 2 métodos de resolución más.

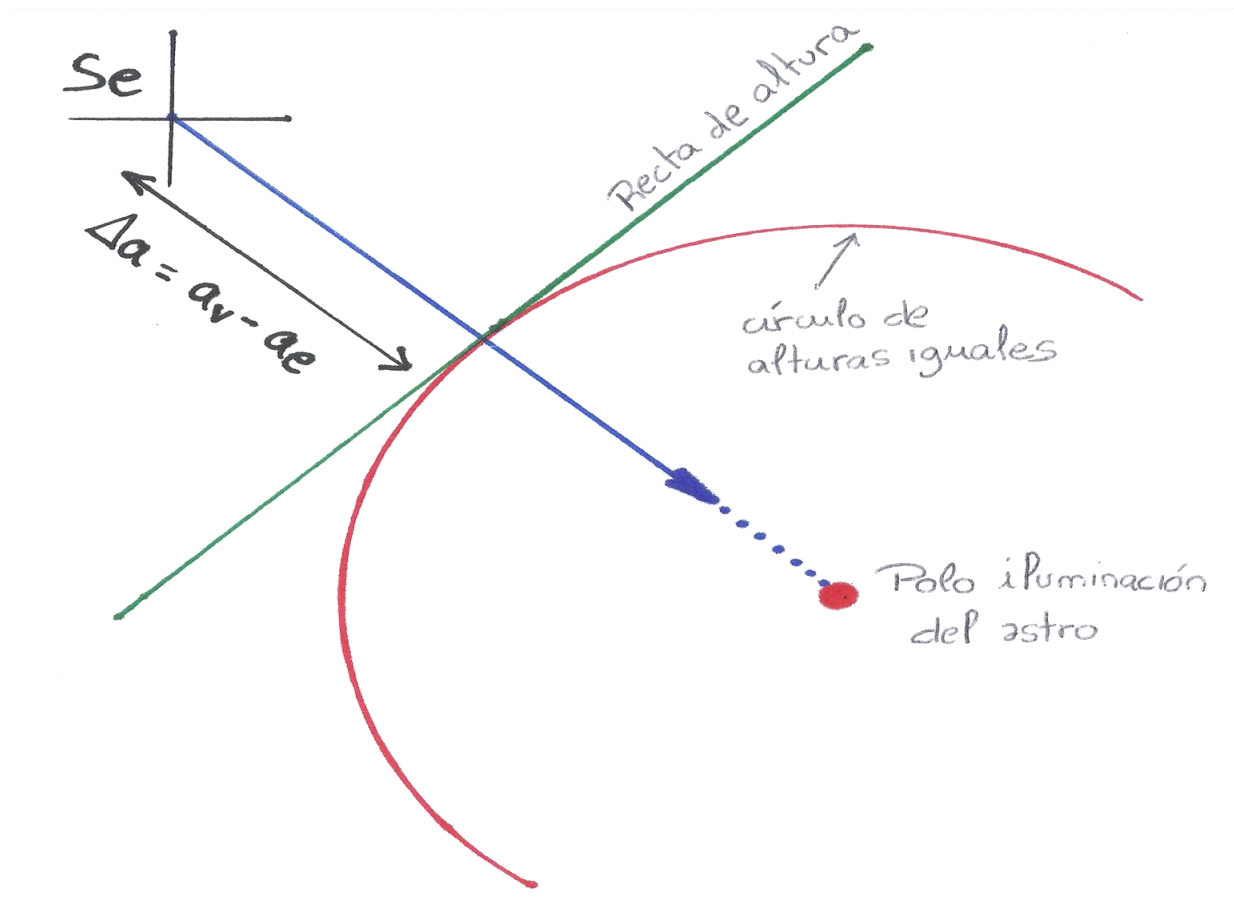


Figura 3. Composición de la recta de altura (Propia)

## Capítulo 3. El sextante

El sextante es un instrumento óptico utilizado para la medición de alturas del astro sobre el horizonte. Esta altura corresponde a un ángulo y se mide en grados. Con el obtenemos una de las coordenadas del astro respecto a nuestra posición.

### 3.1 Partes del sextante

Está compuesto por una armadura (1) sobre la que van montados todos sus elementos. Consta de un limbo graduado (2) que nos marca los grados enteros de altura del astro, de una tambor que nos indica los minutos de grado (3) y un Nonius (4) que da las décimas de minuto. Sobre la armadura va montada la alidada (5), parte móvil del sextante que permitirá, como veremos más adelante, bajar el reflejo del astro a la altura del horizonte para su medición. La alidada está engranada con una cremallera del limbo y un tornillo sin fin. Esta permite su movimiento accionando la pinza (6). Para más precisión en la medida, se hace rotar el tambor micrométrico hasta la posición correcta. Los elementos a observar para la medición se visualizan a través del telescopio (7), que además nos aumenta su tamaño. Sobre la armadura van montados también los espejos y los filtros. Encontramos un par de cada:

- El espejo de índice (8), da la imagen reflejada del astro. Éste está dotado de unos filtros (9) que protegen y permiten la observación del sol. Además incorpora unos tornillos para su ajuste (10) cuyo funcionamiento trataremos más adelante
- El espejo de horizonte (11) está formado por dos partes: un cristal transparente que permite ver el horizonte directamente y un espejo que refleja la imagen del astro que proporciona el espejo de índice. También está equipado con sus filtros (12) y su tornillo para el ajuste (13).

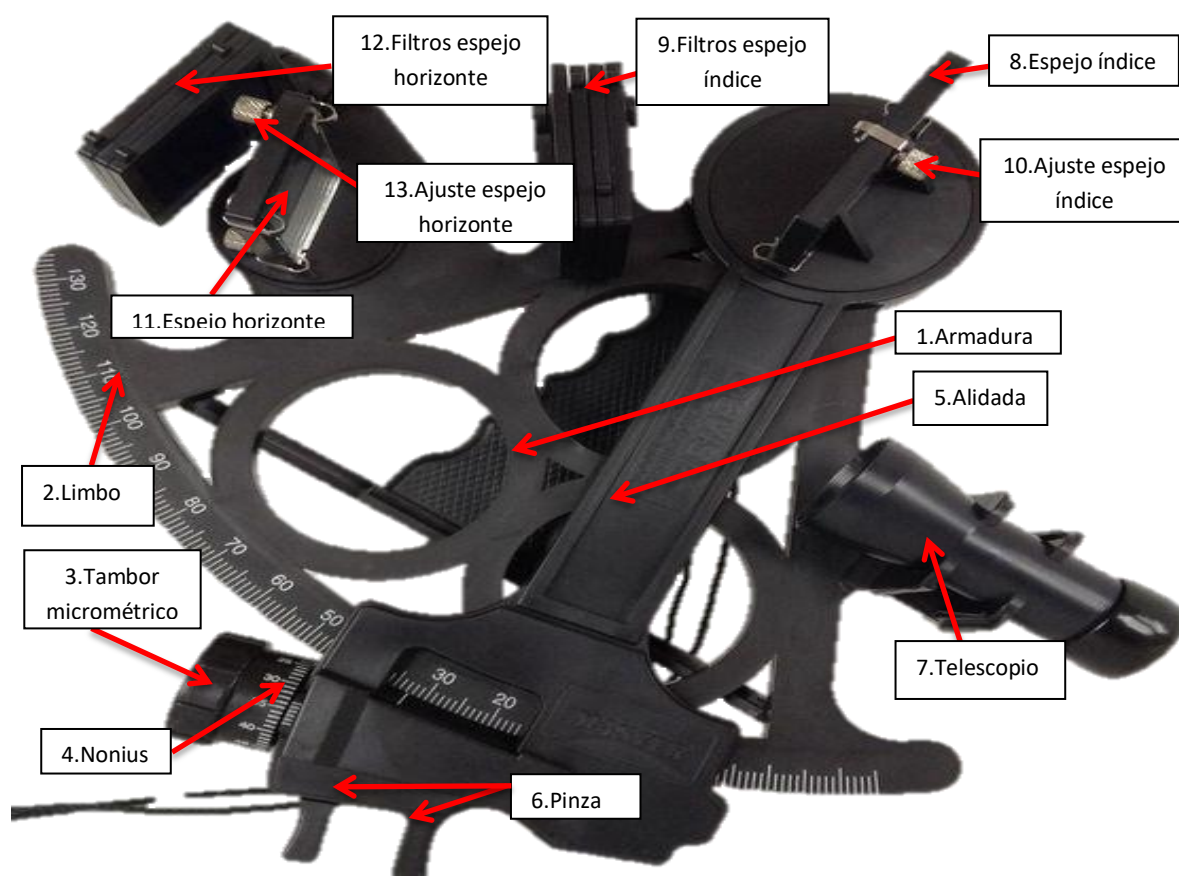


Figura 4. Partes del sextante (nauticocean.com)

### 3.2 Funcionamiento del sextante

Su funcionamiento se basa en, a través de los espejos, bajar hasta a un mismo punto el horizonte y el astro observado y poder medir el ángulo (la altura) de éste. Para ello debemos, en primer lugar, apuntar al astro en cuestión y, en caso de ser el sol poniendo todos los filtros para proteger nuestra vista e ir quitándolos unos a uno hasta obtener una correcta visualización de este. Una vez centrada la vista en el astro, hay que ir bajando el sextante a la vez que hacemos un movimiento inverso con la alidada, subiendo la misma por el limbo. Mientras realizamos esto, veremos que en un punto visualizamos el horizonte y el astro a la vez. Como vemos en la *figura 5* la imagen del astro la observamos gracias a la reflexión del espejo de índice sobre el de horizonte. La imagen del horizonte, la vemos directamente sobre el espejo que lleva su nombre. Cuando estamos apuntando con el telescopio directamente al astro, lo fijamos y vamos bajando el sextante hasta ver el horizonte de forma directa, seguiremos viendo el astro gracias a los espejos y podemos ajustarlo justo sobre el horizonte. En ese momento podremos ver en el limbo, el tambor y el nonius la altura exacta del astro en grados, minutos y decimas de minuto.

Es muy importante, en la medición de la altura de un astro, asegurarse de que estamos tomando las medidas con mucha precisión, tanto en la altura como en el tiempo. Un error en esta medida, por pequeño que sea, puede afectar notablemente en la precisión del resultado ya que la altura del astro varia notablemente por cada segundo que pasa. En cuanto al tiempo, la precisión debe de ser al segundo. En cuanto a la altura, es una buena práctica realizar un movimiento de balance con el sextante, tangenteando el astro sobre el horizonte asegurándose de que el arco que formamos al balancearlo sea tangente al horizonte, como puede verse en la *figura 6* para obtener más precisión en la medida.

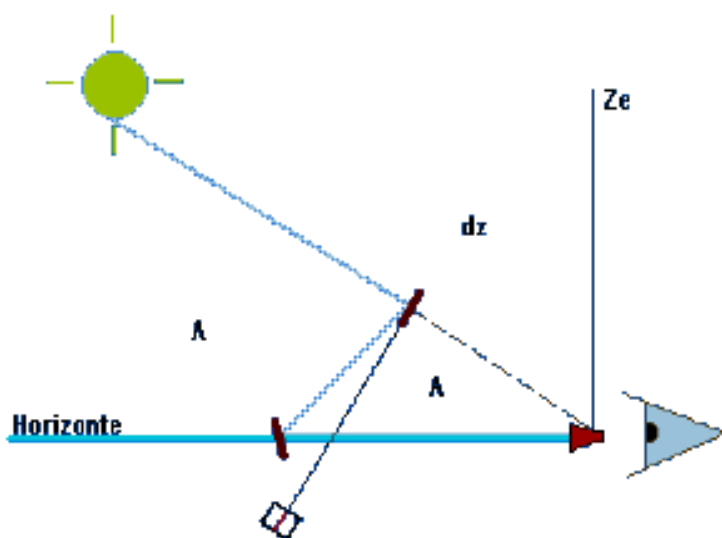


Figura 5. Sistema de espejos del sextante  
(Apuntes FNB)

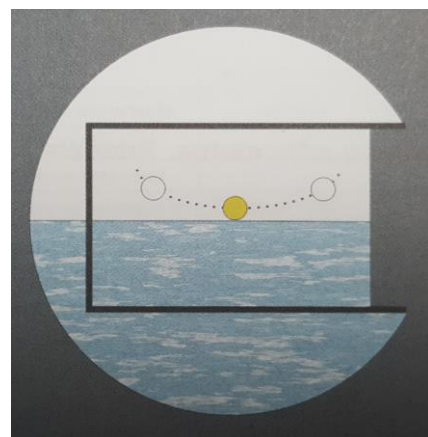


Figura 6. Tangenteo del astro observado  
(Mederos, Luis. *Navegación Astronómica*)



### 3.3 Ajustes del sextante previos al uso

El sextante, como cualquier instrumento, tiene un cierto error sistemático en su medición. Este se debe a una deficiente construcción de la propia estructura o a un mal ajuste de los espejos. Este error es más notable cuanto peor es la calidad del instrumento.

Este error es conocido como el error de índice,  $e_i$ , y hay una pequeña parte que no se puede corregir, la debida una mala construcción del mismo o a efectos diversos como puedan ser una dilatación o contracción del material. Sin embargo una parte del error si puede corregirse y, con ello, minimizarlo. Este es el debido a un mal ajuste de los espejos y puede solucionarse gracias a los tornillos que tienen estos y que hemos visto en el apartado 3.1 *Partes del sextante*. Este error provoca que la medición del 0 grados en el limbo no sea real, y por tanto cuando creemos que estamos partiendo del 0 en una medición, en realidad no es así y tenemos unos minutos de grado de partida por encima o por debajo del 0, tal como se ve en la *figura 7*. Toda aquella parte que no se ha podido corregir se debe calcular y tenerse en cuenta y corregirse en el resultado de la medición.

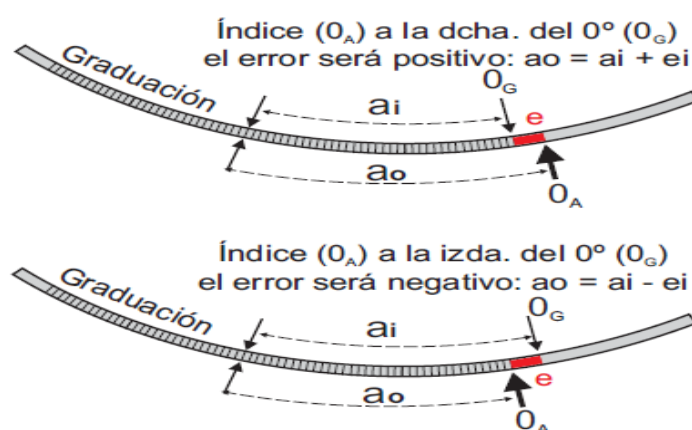


Figura 7. Error de índice (Apuntes FNB)

La forma más sencilla de corregir el error de índice es observar el horizonte con la alidada en el 0 sobre el limbo. Cuando hay error del índice, el horizonte directo y el reflejado no coincidirán, como puede verse en el *figura 8*. Debemos rotar el tambor hasta que estas coincidan. Entonces, obtendremos una medición de unos minutos de grado. Este será nuestro error de índice. Si la medición es a la derecha del 0, las lecturas serán menores de lo que deberían y, por tanto, el error de índice será positivo. Si, por el contrario, está a la izquierda del 0, las lecturas serán mayores de lo que deberían y por tanto el error de índice será negativo. Una vez corregido, pasaremos de tener la altura instrumental  $a_i$  a obtener la altura observada  $a_o$ , según la expresión  $a_o = a_i + e_i$



Figura 8. Vista del horizonte con error de índice (Mederos, Luis. *Navegación Astronómica*)

Como ya se ha dicho anteriormente, la parte del  $e_i$  que se debe a un mal ajuste del sextante puede corregirse. Su principal causa es una falta de perpendicularidad de los espejos respecto al plano del limbo y la falta de paralelismo entre ambos espejos. Su ajuste se debe realizar tal y como se describe a continuación, siguiendo el orden establecido:

### 3.3.1. Ajuste del espejo de índice

Para ello debemos colocar la alidada aproximadamente a la mitad de la escala del limbo. A continuación colocamos el sextante tal como se ve en la *figura 9* y tenemos que observar el limbo de forma directa y a través del espejo de índice. El limbo debe estar alineado en ambas imágenes, sin ningún salto, para estar el espejo perpendicular al plano del sextante. Si no es así, como se ve en la *figura 9*, debe corregirse mediante el tornillo que este espejo tiene para ello y que vimos en el apartado 3.1 *Partes del sextante*.

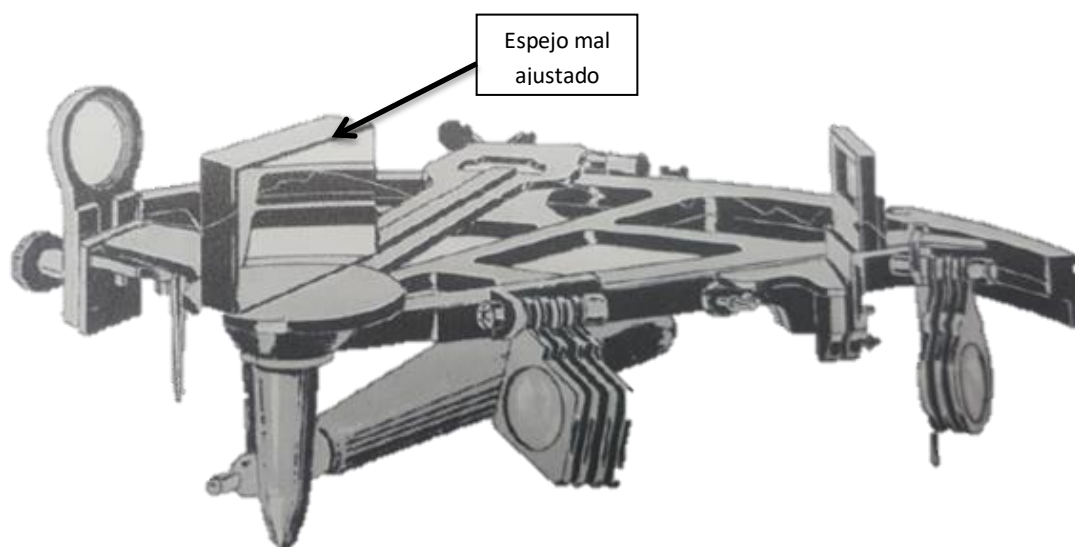


Figura 9. Colocación alidada para corrección del error (Apuntes FNB)

### 3.3.2 Ajuste del espejo de horizonte

El ajuste, en este caso, se divide en dos partes:

- En primer lugar, debemos observar una línea horizontal como puede ser el horizonte a través del telescopio, con la alidada **próxima al 0**. Si observamos, como en la imagen izquierda de la *figura 8*, que la imagen directa y la reflejada no coinciden, debemos hacer girar levemente uno de los dos tornillos (el que corresponda, habrá que mirarlo previamente) hasta que las imágenes coincidan como en la imagen derecha de la *figura 8*.
- En segundo lugar, y sin modificar la posición de la alidada, miramos con el telescopio una línea vertical como puede ser el palo de una bandera. Al observarla y mover lentamente el sextante en sentido lateral, la línea vertical parece saltar de forma discontinua hacia un lado cuando pasamos de la imagen directa a la reflejada, como en la imagen derecha de la *figura 10*. Entonces, ajustaremos el otro tornillo hasta que eliminemos este salto y obtengamos una imagen como la de la derecha de la *figura 10*. Este es el conocido como error lateral.

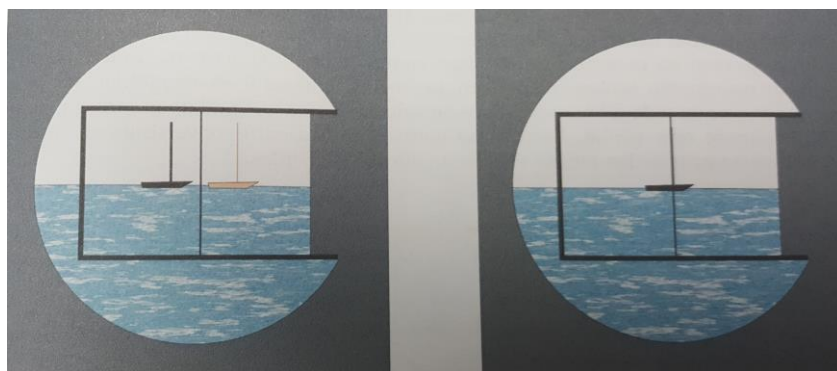


Figura 10. Salto de la imagen durante la corrección (Mederos, Luis. *Navegación Astronómica*)

### 3.3.3 Eliminación del error de índice

Para la eliminación del error del índice, colocamos la alidada exactamente en el  $0^{\circ} 0'$ . Miramos al horizonte y veremos que de nuevo las imágenes del horizonte directo y el reflejado no coinciden. Debemos hacer girar muy suavemente el segundo tornillo hasta que las imágenes coincidan de nuevo.

### 3.3.4 Comprobación del ajuste

Es de vital importancia la comprobación final del error de índice después de todo el proceso. Es una buena práctica balancear el sextante, como en la *figura 11*, y observar si los horizontes permanecen en la misma línea durante el proceso. Además, éste debe ser revisado con frecuencia, sobre todo después de un largo periodo de no utilizar el sextante ya que es muy fácil que los espejos se desajusten. Es más, lo ideal sería revisar el error de índice antes de cada uso ya que con los cambios de temperatura las dilataciones y contracciones del material pueden hacerlo variar.

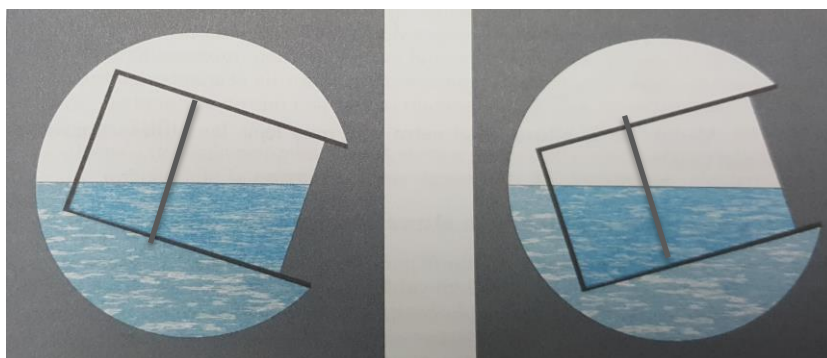


Figura 11. Balanceo del sextante (Mederos, Luis. *Navegación Astronómica*)

## 3.4 Correcciones a la altura instrumental

La altura que obtenemos de forma directa del sextante es la denominada altura instrumental,  $a_i$ . Una vez la hemos corregido teniendo en cuenta el error de índice, obtenemos la altura observada,  $a_o$ . No obstante, esta aun no es la altura real que tiene el astro sobre la línea del horizonte, ya que debemos aplicar distintas correcciones hasta obtener la altura verdadera,  $a_v$ . En los siguientes puntos se explicarán las diferentes correcciones que se deben aplicar y, en la *figura 12* se pueden ver gráficamente estas correcciones y como pasar de la  $a_o$  a la  $a_v$ .

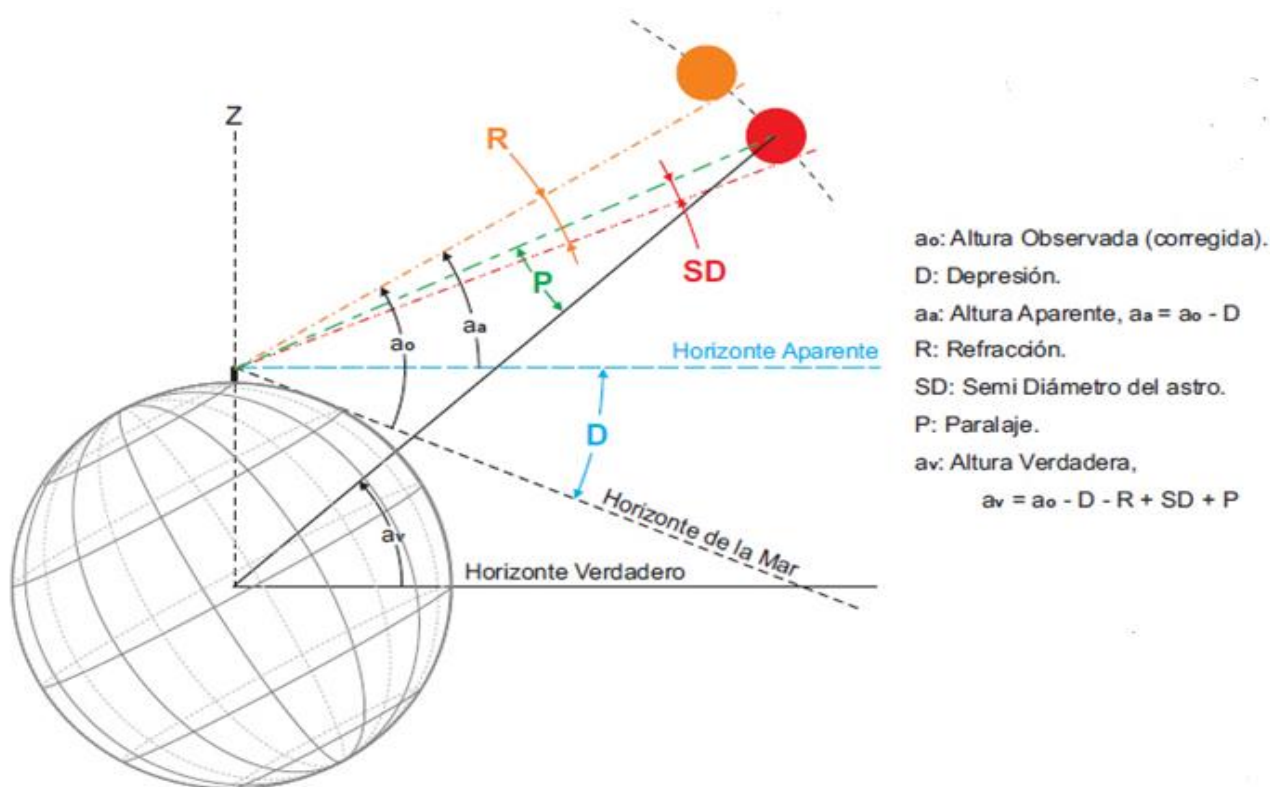


Figura 12. Correcciones a la altura observada (Apuntes FNB)

### 3.4.1 Corrección por depresión del horizonte

En la *figura 12* podemos observar 3 horizontes distintos: Horizonte Aparente, Horizonte de la Mar y el Horizonte Verdadero. El horizonte verdadero, o también llamado astronómico, es el referenciado al centro de la tierra. Si tomamos cualquier astro que no sea el Sol o la Luna, al ser la distancia entre estos muy grande, podemos considerar que los rayos de los astros a nosotros y al centro de la tierra son paralelos, por lo que no cambiaría la altura en cuestión. No obstante, no pasaría lo mismo con la Luna o el Sol, debido a su proximidad.

No obstante lo dicho, y como vemos en la *figura 12*, cuando tomamos una medida de un astro no lo hacemos ni respecto al horizonte verdadero ni al aparente, cuyos resultados serían igualmente buenos, sino con el horizonte del mar. Por tanto, habrá que aplicar una corrección tal que:  $a_a = a_o - D_p$  y el resultado obtenido lo denominamos altura aparente.

Este valor  $D_p$  dependerá de la altura del observador y nos vendrán todos sus valores tabulados en el Almanaque Náutico.

### 3.4.2 Corrección por refracción

Cuando la luz procedente del astro que visualizamos atraviesa la atmósfera, esta luz se curva por efectos de la refracción. Al pasar el rayo de luz por diferentes capas con distintas densidades y por tanto distintos índices de refracción, este se curva hacia el interior de la tierra. Este efecto nos hace ver la imagen del astro más arriba de lo que realmente está, como vemos en la *figura 12*. Para su corrección simplemente debemos restarle a nuestra altura el ángulo  $R$ , que ya está calculado para un astro y una posición determinada, y lo podemos encontrar en el Almanaque Náutico.

### 3.4.3 Corrección por semidiámetro

Esta corrección no se aplica en todas las mediciones, solamente al Sol y la Luna. Para cualquier astro que no sean Luna o Sol, debido a su gran distancia respecto a nosotros, solamente visualizamos un pequeño punto en el firmamento, por lo que al tomar su medición con el sextante no tenemos partes superior o inferior que medir sino simplemente el punto en cuestión. No es así cuando medimos la altura del Sol o la Luna. Debido al tamaño con que la vemos, para mayor precisión tomaremos la medidas con sus limbos, bien sea el inferior o el superior. Pero la altura debe medirse respecto a su centro, donde perderíamos precisión si pretendiéramos medirlo. Así pues, debemos aplicar un factor de corrección para obtener la medición desde su centro. Este es, como puede deducirse, la medida de su radio o semidiámetro, que se restará o sumará en función de que limbo hayamos tomado. Estas medidas de los SD las encontramos en el Almanaque Náutico. Podemos observarlo en la *figura 12*.

### 3.4.4 Corrección por paralaje

Como he mencionado anteriormente, la afirmación de que tomar la medición respecto al horizonte aparente y al verdadero da el mismo resultado, no se aplica si el astro está cerca, como es el caso del Sol o de la Luna. En la *figura 12* se puede ver como en estos casos hay que aplicar una corrección P para obtener el valor real, que siempre será positivo, ya que el ángulo real siempre ser más pequeños que el ángulo con el que lo vemos.

Si a la altura aparente obtenida anteriormente le aplicamos las correcciones por refracción, paralaje y semidiámetro obtenemos lo siguiente:  $a_a - R + SD + P = a_v$

Con esto obtenemos la altura definitiva, la que utilizaremos para los cálculos posteriores denominada altura verdadera.



## Capítulo 4. Conceptos básicos de la Navegación Astronómica

En la Navegación Astronómica es fundamental la comprensión de los conceptos básicos en los que nos basaremos a la hora de realizar los ejercicios para comprender en todo momento lo que estamos haciendo, ya que son ejercicios muy largos, metódicos, con muchos pasos a seguir que pueden realizarse simplemente siguiendo unas instrucciones paso a paso, pero que si no se comprende realmente lo que se está haciendo es muy sencillo equivocarse en algunos de sus pasos, y un simple error por pequeño que sea en una parte vital del ejercicio puede invalidar totalmente el resultado.

Por ello es importante explicar estos conceptos claramente:

### 4.1 Coordenadas de los astros

Podemos encontrar multitud de coordenadas y de líneas y puntos referentes a los astros, pero a continuación se explican los más importantes para la realización de los ejercicios que se desarrollarán más adelante.

Se clasificarán en función de si dependen o no de nuestra posición, ya que esta clasificación nos servirá más adelante para el método de Doves. Así pues, podrán ser coordenadas respecto a observador o respecto a la tierra.

#### 4.1.1 Coordenadas respecto a la tierra

Estas vienen reflejadas directamente en el almanaque en función de la hora UTC, por lo que también se les puede llamar coordenadas horarias, solo dependen del tiempo.

- **Declinación ( $\delta$ ):** es el ángulo de círculo máximo contado desde el ecuador y perpendicular a este hasta el astro. Recorre lo que se conoce como círculo horario del astro. Puede ir del ecuador hacia el N o el S, siendo su valor de  $-90$  a  $+90$  grados. Puede observarse en el dibujo de la izquierda de la *figura 13*.
- **Co-declinación ( $c\delta$ ):** es el ángulo del círculo horario del astro que va desde el polo norte hacia el astro. Su valor es siempre positivo y va desde  $000$  a  $180$  grados. Si el astro está en el polo Norte, su resultado es el complementario de la declinación ( $90 - \text{declinación}$ ). Si está en el polo Sur, es  $90 + \text{declinación}$ . Puede verse en el dibujo de la derecha de la *figura 13*.

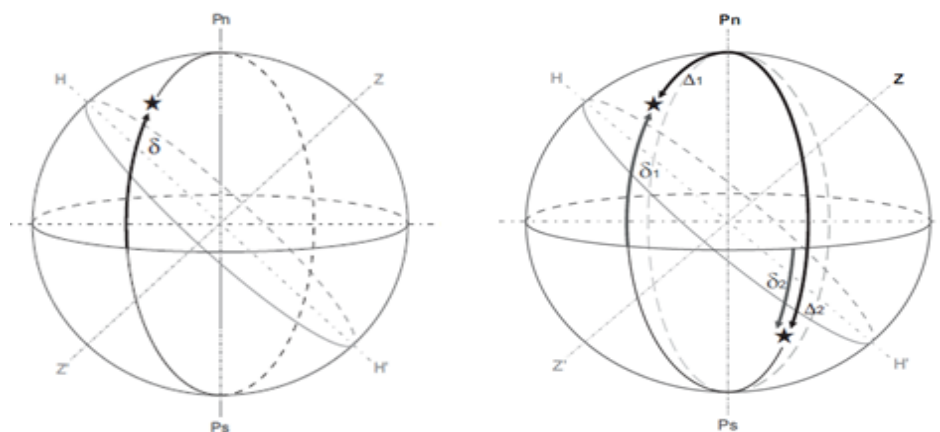


Figura 13. Declinación y co-declinación de un astro (Apuntes FNB)



- **Horario de Greenwich (hG):** como se observa en la *figura 14*, es el ángulo que recorre el ecuador y va desde el meridiano de Greenwich hasta el meridiano en el que se encuentra el astro, conocido como círculo horario del astro. Se cuenta siempre en dirección Oeste y tiene valores de 000 hasta 360 grados.

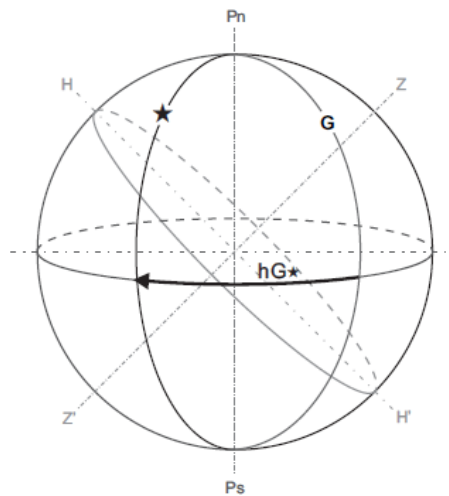


Figura 14. Horario de Greenwich de un astro (Apuntes FNB)

#### 4.1.2 Coordenadas respecto al observador

- **Horario del lugar (hL):** es el ángulo medido sobre el ecuador desde nuestro meridiano (el que pasa sobre nosotros) hasta el círculo horario del astro. Si bien es cierto que también depende de la hora UTC y, por tanto, estaría dentro de las coordenadas horarias, es un dato que no podemos conocer sin tener una situación de estima, por tanto depende también de nuestra situación y es una coordenada respecto al observador. Tiene también un valor de 000 a 360 grados y se mide siempre hacia el Oeste. Se puede observar en la *figura 15*
- **Polo del astro (P):** este se obtiene del horario del lugar, y es igualmente el ángulo de ecuador celeste desde nuestro meridiano al círculo horario del astro, pero en este caso no se mide siempre hacia el Oeste sino que es la distancia mínima a recorrer. Por ello, no medirá nunca más de 180 grados. Si el  $hL < 180$   $hL = P$ , si  $hL > 180$   $P = 360 - hL$ . Se puede observar en la *figura 16*

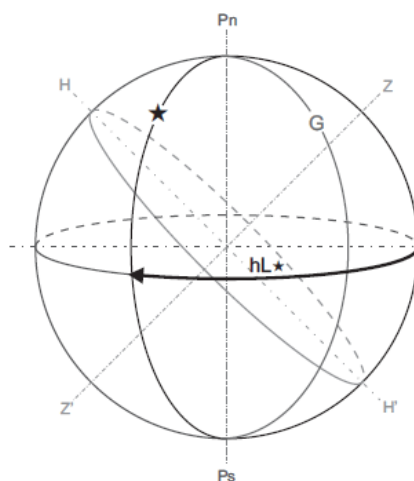


Figura 15. Horario del lugar del astro (Apuntes FNB)

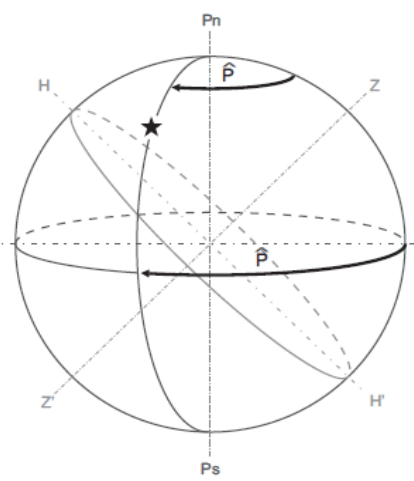


Figura 16. Polo del astro (Apuntes FNB)



- **Conceptos de zenit y nadir y msL y miL:** aunque no sean coordenadas del astro exactamente, si depende de nuestra posición y es necesario explicarlos para comprender conceptos que vienen a continuación. El zenit (*figura 18*) es el punto del cielo justo sobre nuestra cabeza, y el nadir (*figura 17*) sería su opuesta, al otro lado de la esfera terrestre y no visible para el observador. Estos 2 puntos forman un eje de referencia para nuestro horizonte, perpendicular a este. El meridiano superior del lugar (msL) (*figura 18*) es el semicírculo máximo entre ambos polos que contiene nuestro zenit. El meridiano inferior del lugar (miL) (*figura 17*) es la otra parte del semicírculo máximo, la que no contiene el zenit y si contiene el nadir.

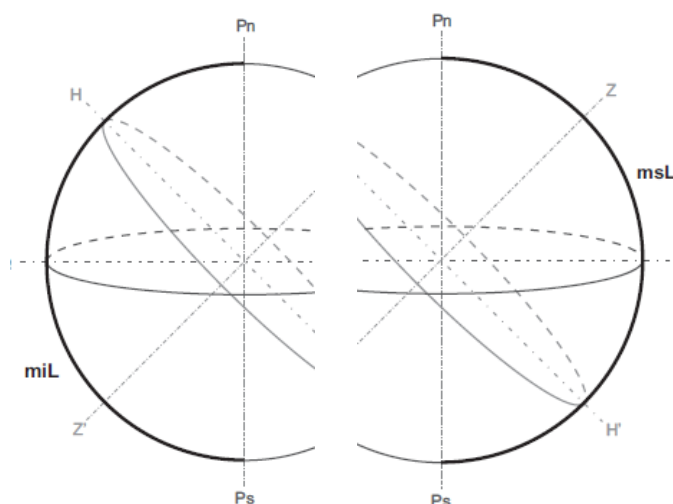


Figura 17. Meridiano inferior del lugar (Apuntes FNB)

Figura 18. Meridiano superior del lugar (Apuntes FNB)

- **Altura verdadera:** como hemos visto en apartados anteriores, es la altura (ángulo) medido desde el horizonte verdadero o astronómico hasta el astro. El círculo máximo que recorre la altura lo llamamos vertical del astro. Toma valores entre 00 y 90 grados si está por encima del horizonte, y de 00 a -90 grados si está por debajo de éste. Se puede observar en la *figura 19*.
- **Distancia zenital:** es la distancia entre nuestro zenit y el astro recorriendo la vertical del astro. En el caso de alturas positivas es el complementario de esta ( $90 - a_v$ ). Si la altura es negativa, es  $90 - a_v$ . Es siempre positivo y va de 000 a 180 grados. Se puede observar en la *figura 20*.

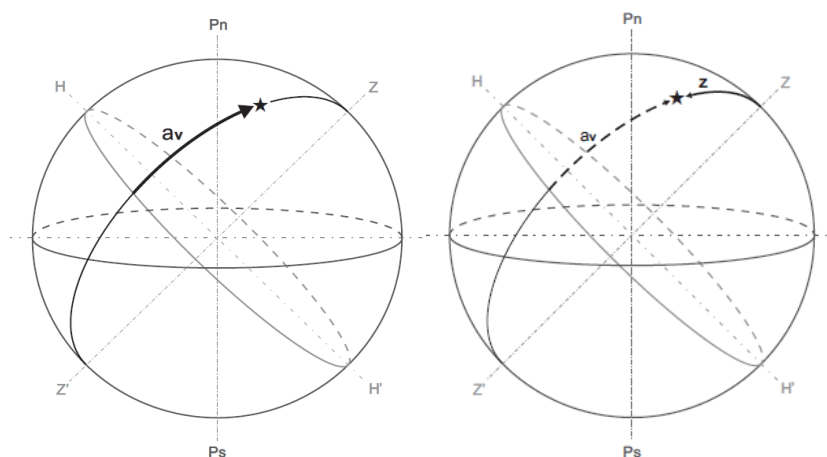


Figura 19. Altura verdadera (Apuntes FNB)

Figura 20. Distancia zenital (Apuntes FNB)

- **Azimuts:** podemos encontrar 3 tipos de azimuts: cuadrantal, náuticos y astronómico, aunque los que no interesan son estos 2 últimos. El azimut náutico (Z) es el ángulo medido sobre el horizonte astronómico desde el punto cardinal norte hasta la vertical del astro (circulo máximo perpendicular al horizonte que contiene el astro, zenit y el nadir). El azimut náutico tiene un valor comprendido entre 000 y 360 grados. Se puede ver en la *figura 21*.

El azimut astronómico (Za) funciona igual que el anterior solo que se contara desde el N si estamos en el hemisferio norte o desde el S si estamos en el hemisferio S y por el camino más corto. Así pues, en este caso tomará valores desde 000 hasta 180 grados e irá acompañado de un N o S para indicar en que hemisferio se tomó. Se puede ver en la *figura 22*.

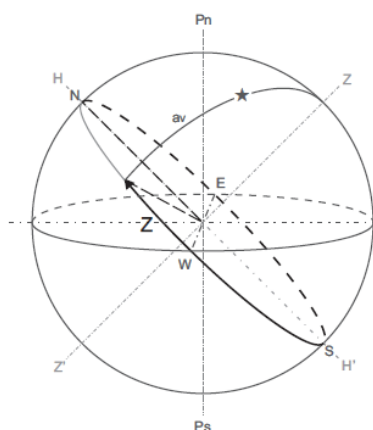


Figura 21. Azimut náutico (Apuntes FNB)

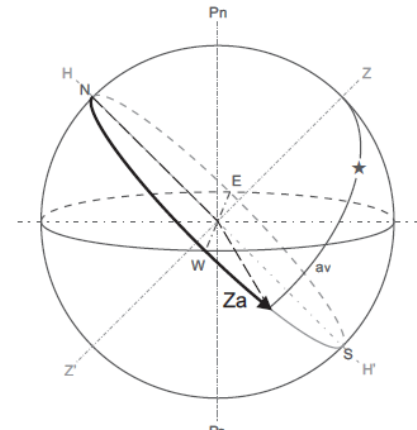


Figura 22. Azimut astronómico (Apuntes FNB)

## 4.2 Triángulo de posición

Tal y como hemos visto anteriormente, podemos obtener de un astro 2 tipos diferentes de coordenadas: las referentes a la tierra, denominadas comúnmente coordenadas horarias y las referentes a nuestra posición en la tierra, denominadas coordenadas horizontales. El triángulo de posición se consigue dibujando sobre la esfera terrestre todas estas coordenadas, conformando una serie de triángulos esféricos cuya resolución nos aportara los datos necesarios para dibujar las diferentes rectas de altura y obtener la resolución de los ejercicios de posicionamiento en el método tradicional. También veremos que en el caso de otros métodos como el método de Doves es la propia resolución de unos triángulos esféricos la que nos aportara de forma directa la solución del problema: nuestra posición.

En la *figura 23* podemos ver sus diferentes partes, que están explicadas a continuación y son muchos de los conceptos explicados anteriormente.

- Podemos observar que sobre la esfera celeste dibujamos nuestros ejes zenit-nadir (Z-Z') usando nuestra latitud ( $\varphi$ ).
- Con ellos, podemos también dibujar la co-latitud.
- Perpendicular al eje zenit-nadir trazamos el horizontes H-H'.
- Situamos el astro con sus coordenadas horarias hL y  $\delta$ .
- Una vez dibujadas la declinación del astro ( $\delta$ ), se puede deducir y dibujar también su co-declinación ( $c\delta$ ).

- f) Ahora solo queda dibujar la altura verdadera del astro, partiendo desde el horizonte hasta el zenit. Su complementario será la distancia zenital.

Con esto quedara conformado nuestro triángulo de posición formado por sus 3 lados co-latitud, distancia zenital y co-declinación. Además que ya tenemos 2 de los ángulos de este triángulo:

- A) El ángulo entre la co-latitud y la co-declinación coincide con el hL.  
B) El Azimut astronómico coincide con el ángulo ente la co-latitud y la distancia zenital

El tercer ángulo podría deducirse en la resolución del triángulo y es el conocido como ángulo paraláctico. Este no se utiliza en el método tradicional, pero si en el método de Doves.

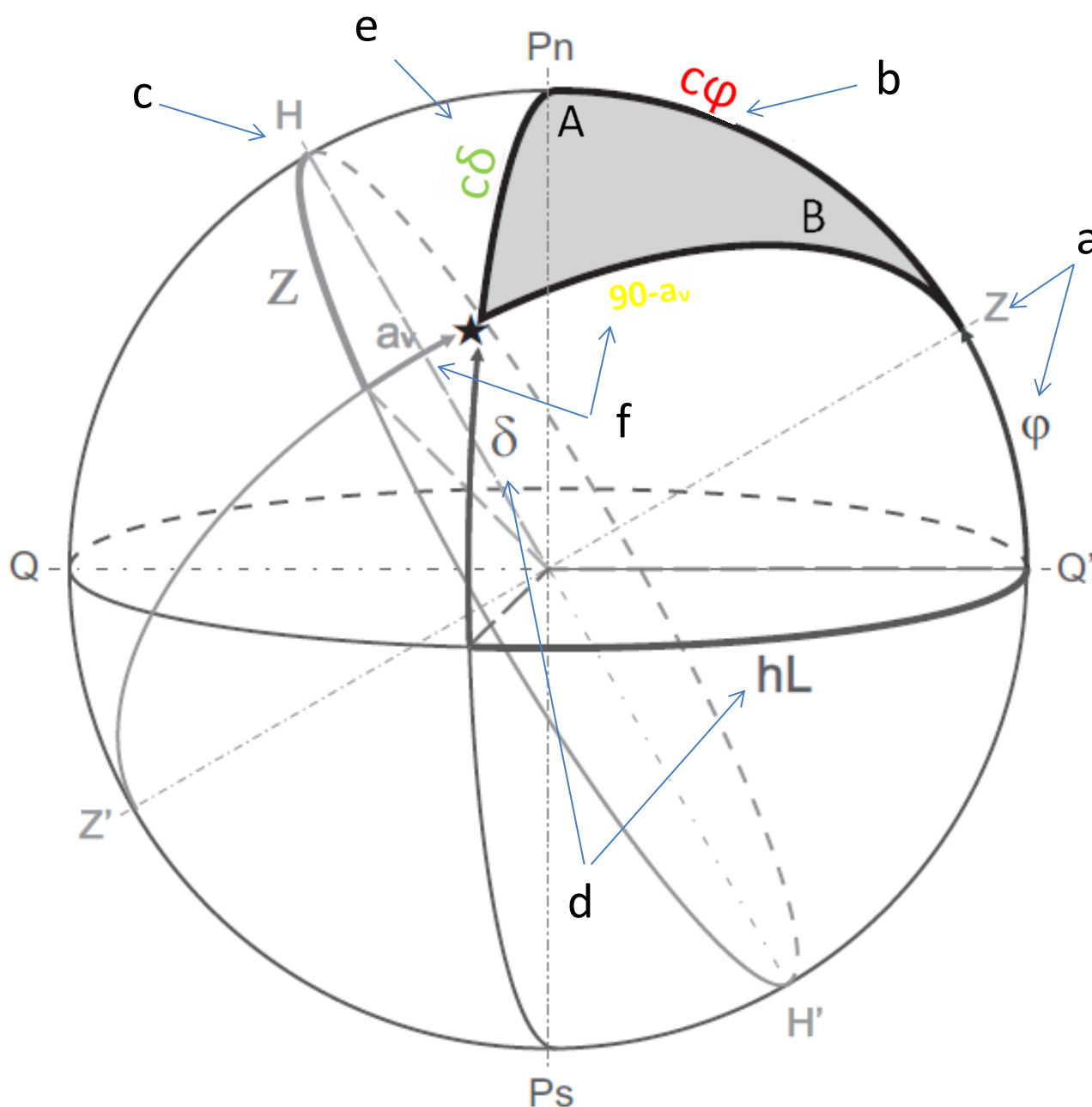


Figura 23. Triángulo de posición (Apuntes FNB)

### 4.3 Rectas de altura

La recta de altura no es en esencia una recta ya que en realidad es un pedazo muy pequeño de la circunferencia de alturas iguales, por lo que la aproximamos a una recta. Como ya hemos visto en el capítulo 2, la circunferencia de alturas iguales está formada por toda una serie de infinitos puntos sobre la esfera terrestre en los cuales cualquier observador vería un astro determinado a una misma altura sobre el horizonte. En la *figura 24* podemos ver como esta circunferencia tiene como centro el denominado polo de iluminación del astro (pia) que al astro podría asemejarse a la relación entre el observador y el zenit. El radio de esta circunferencia es la distancia zenital, es decir,  $90^\circ - a_v$ . En la imagen se podemos ver que la recta de altura se situaría en el punto marcado como  $L_{PA}$ , que es la línea de posición sobre la que nos encontramos.

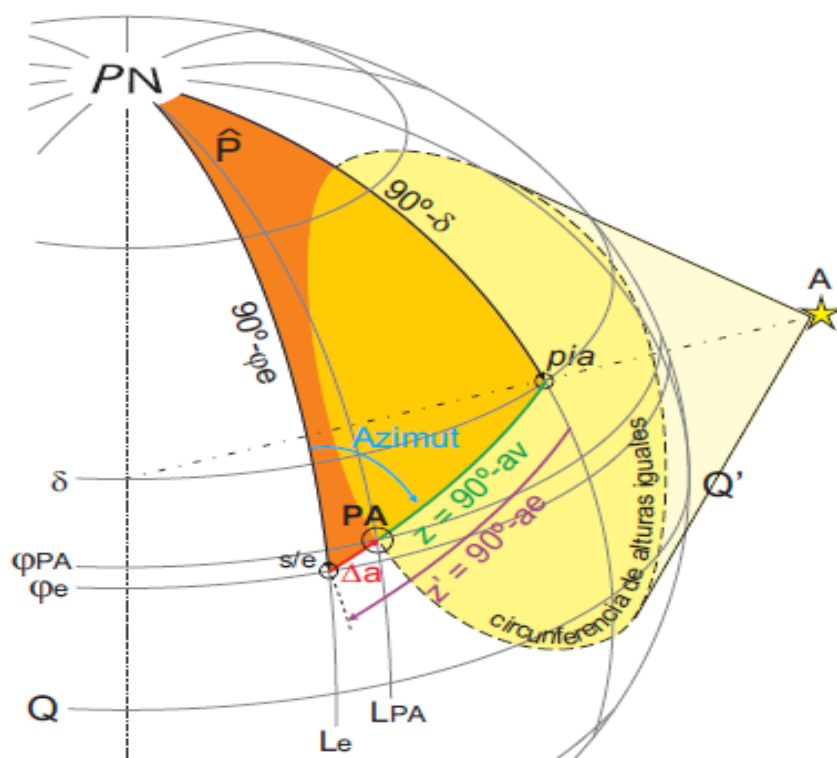


Figura 24. Composición de la circunferencia de alturas iguales respecto a la s/e (Apuntes FNB)

Es imprescindible comprender bien el concepto de circunferencia de alturas iguales ya que es de donde sale la recta de altura. Hay que recordar que el método de cálculo tradicional nos exige una estima previa razonable de nuestra posición para el cálculo. Si bien veremos más adelante que se puede realizar el cálculo sin ella, con la utilización de otro método, el tradicional nos lo exige así. Por tanto, partiendo de que tenemos una situación de estima previa (s/e), podemos suponer que la circunferencia de alturas iguales pasará cerca de esta como podemos ver en la *figura 24*, por lo que nos quedaremos solamente con el pedazo de circunferencia que pasa cerca de nuestra situación de estima. Será tan pequeño, que lo asemejaremos a una recta: la recta de altura.

Como ya hemos visto en el capítulo 2, esta recta de altura tendremos que dibujarla sobre una carta, que junto con otra recta de altura de otro astro nos dará una intersección, que será el punto donde estamos realmente.

Los datos que nos permiten trazar esta recta sobre la carta los obtenemos de las mediciones y los cálculos de los astros y triángulo de posición y conforman lo que se denomina determinante de la recta de altura. Este está compuesto por la  $\Delta a$  (diferencia entre la altura verdadera y la altura estimada (véase capítulo 2)) y el acimut del astro. Además, con este determinante obtenemos un punto sobre el que sabemos que pasa nuestra recta de altura, por tanto, nuestra posición es algún punto sobre esa recta ya situada en la carta. Este punto que nos permite situar la recta de altura en la carta es el denominado punto aproximado.

Al final, el objetivo por el que se creó el concepto de recta de altura es el de poder ubicar un tramo de la circunferencia de alturas iguales pudiendo prescindir del polo de iluminación del astro (su centro), ya que al ser el radio de este (la distancia zenital) muy grande, de varios miles de millas, no se podía dibujar este fragmento de circunferencia en una carta de punto mayor que nos proporcionara suficiente precisión. Esto tiene como contrapartida que nos obliga a tener una situación estimada que tomaremos como referencia para ubicar este tramo de la circunferencia, que como ya hemos dicho en numerosas ocasiones, al ser tan pequeño respecto a la circunferencia en sí lo asimilamos a una recta.

#### 4.3.1 Errores derivados de la recta de altura

Si todos nuestros cálculos y medidas de altura y tiempo han sido totalmente precisos, y nuestros instrumentos funcionan a la perfección, cuando trazamos una recta de altura es seguro que nos encontraremos sobre algún punto de la esta. De la misma forma, al trazar dos rectas de altura, estaremos, seguro, sobre la intersección de estas dos.

No obstante, en la práctica, esto nunca es así debido a que siempre estaremos sujetos a una serie de errores tanto en las mediciones como en los cálculos. Estos se clasifican en 2 tipos:

- Errores sistemáticos: son aquellos que vamos a tomar inevitablemente en todas las mediciones que realicemos, y tendrán en todos los casos el mismo valor y signo. Estos pueden deberse a:
  - Error sistemático debido a un mal cálculo del error de índice o defectos del propio sextante
  - Error sistemático debido a un mal conocimiento de la elevación o a la refracción del horizonte y afecta a la corrección por depresión del horizonte.
- Errores accidentales: son de naturaleza aleatoria. Estos pueden deberse a:
  - Errores accidentales por balanceo del buque, línea del horizonte mal definida, viento, olas...
  - Errores accidentales debido al sextante

La suma de los errores sistemáticos y los errores accidentales nos darán como resultado el error total:

$$\epsilon_t = \epsilon_s + \epsilon_a$$

Todo este error se verá reflejado sobre la diferencia de alturas, por tanto, a la hora de dibujar la recta de altura esta será paralela a la real. Por tanto, en cualquier caso dibujaremos la recta de altura, con el error que tenga, sobre la línea del acimut de nuestro astro, que es el radio de la circunferencia de alturas iguales. Entonces, ya no tenemos una línea de posición sobre la que tenemos la certeza que estamos, sino que esta se ha convertido en una zona de posición, determinada por dos rectas paralelas a la recta de altura obtenida en el cálculo y separadas una distancia  $\epsilon_t$  a cada lado de esta, como podemos ver en la *figura 25*.

Al dibujar sobre la carta dos rectas de altura obtenidas en el cálculo, con sus zonas de posiciones respectivas debidas al error en cada medida, ya no tenemos un punto de intersección sino una zona de intersección, donde tenemos la certeza que esta nuestra situación real y es la denominada zona de certidumbre. Cabe destacar que una parte del error de ambas mediciones tiene el mismo valor, el error sistemático, que veremos más adelante como podemos eliminarlo con la utilización de las bisectrices de altura.

En la *figura 25* podemos ver todo lo dicho anteriormente. La recta de altura trazada a la izquierda tiene su zona de posición delimitada a cada lado a una distancia  $\epsilon_1$  y la recta de la derecha con su zona delimitada por el  $\epsilon_2$ . Así pues podemos observar que en la intersección de estas zonas se crea el paralelogramo con los vértices A, B, C y D dentro del cual estaría situada nuestra posición observada.

Este paralelogramo tendrá los ángulos iguales 2 a 2, y serán los 2 mismos ángulos que se forman en la intersección de las 2 rectas de altura  $\alpha$  y  $\beta$ : los ángulos A y C son iguales  $\alpha$  y los ángulos B y D iguales a  $\beta$ . Además el error máximo estaría situado en los vértices A y C a una distancia mayor del centro que los vértices B y D. Se puede deducir fácilmente que si las rectas de altura fueran perpendiculares entre sí, ambos ángulos,  $\alpha$  y  $\beta$ , formarían  $90^\circ$  y por tanto todos los ángulos del paralelogramo serían también de  $90^\circ$ : tendríamos un cuadrado como zona de certidumbre y la distancia de la intersección de las rectas de altura a los puntos A y C sería la mínima posible, y coincidiría ahora sí con la distancia de D y B del centro. Es entonces cuando la zona sería lo más pequeña posible. Por tanto al ser también la recta de altura perpendicular al azimut del astro, y las rectas de altura perpendiculares entre sí, también lo serán sus azimuts. Es por esto que podemos concluir que el error mínimo se da cuando las diferencias de azimuts es de  $90^\circ$ .

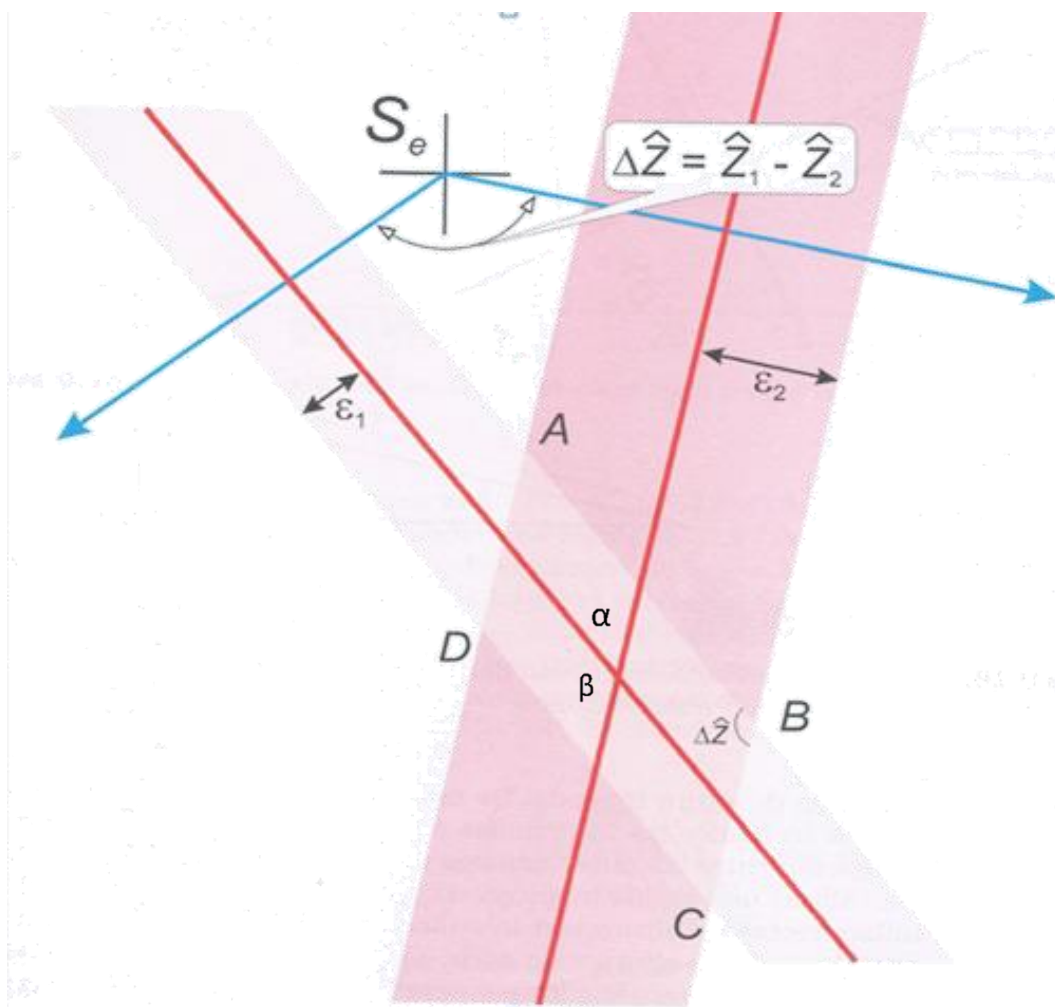


Figura 25. Zonas de posición derivada de los errores (Mederos, Luis. *Navegación Astronómica*)

Cuando obtenemos la intersección de 3 rectas de altura, puede ocurrir que estas se corten en un mismo punto o que se corten formando un triángulo. Si se da el primer caso, consideraremos esa nuestra posición, aunque eso no es lo habitual. Generalmente, estas 3 rectas se cruzan formando un triángulo. Si este es pequeño, tomaremos el centro de este como la situación observada, pero en el caso de que este sea de un tamaño considerable, deberemos suponer que está sujeta a un error considerable. Este error es la suma de los errores accidentales y los sistemáticos. La única forma de eliminar los errores accidentales es siendo muy cuidadoso a la hora de tomar las medidas y realizar los cálculos (aunque más adelante veremos que en realidad si existe un método) por lo que, si ha sido así, podemos suponer que la mayor parte del error es sistemático. Este error puede eliminarse con el método de las bisectrices de altura, que veremos a continuación.

#### 4.4 Bisectrices de altura

Este método consiste en considerar que, el ser todo o la mayor parte del error de las rectas sistemático (ya que recordemos que este método es solamente para eliminar este tipo de error), las dos rectas de altura se verán desplazadas en la dirección del azimut y en la misma medida respecto a la recta que hemos calculado, ya que el error tiene el mismo o casi el mismo valor en ambos casos. Por tanto, podemos trazar dos rectas paralelas a las que hemos obtenido (a la misma distancia de valor  $\epsilon_s$ ) y será su intersección la situación real. Como vemos en la *figura 26*, este punto está sobre la bisectriz de las rectas de altura que teníamos. Esta es la denominada bisectriz de altura, y tiene la característica de que nuestra posición estará sobre ella.

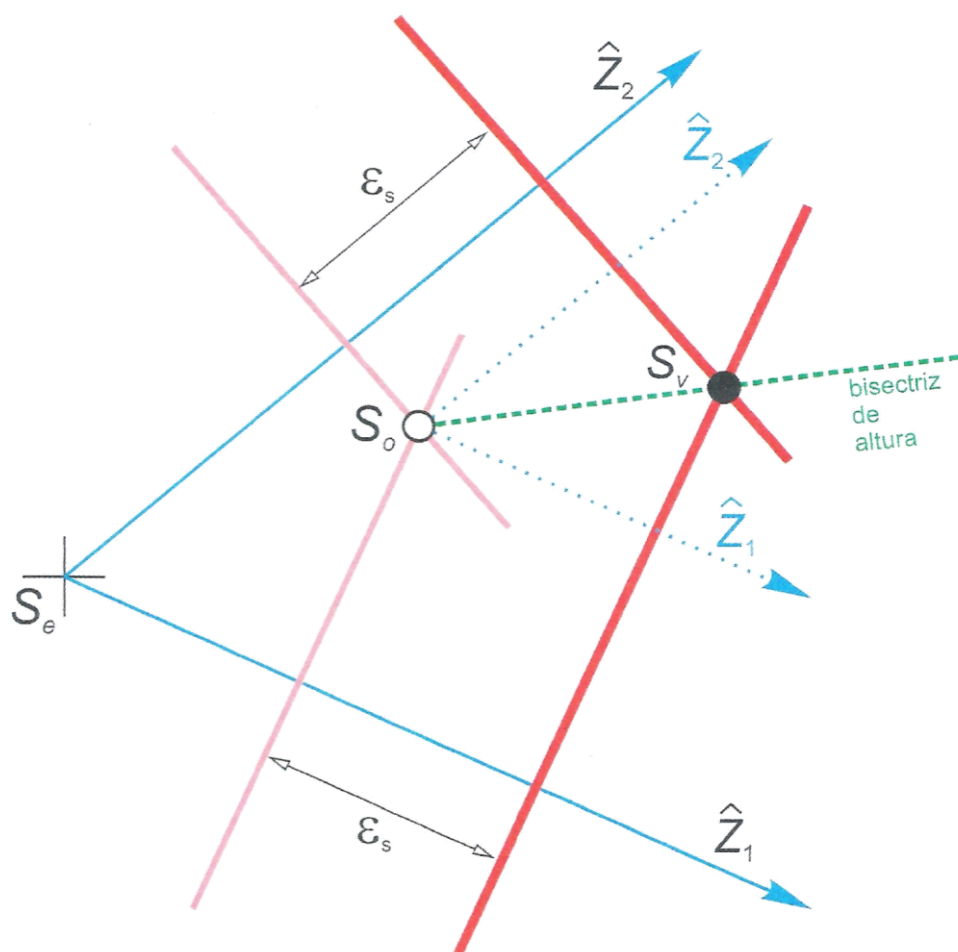


Figura 26. Bisectriz de altura (Mederos, Luis. *Navegación Astronómica*)



Como ya se ha dicho, este método se utiliza para eliminar los errores sistemáticos, por tanto, solo debe usarse cuando estos son los predominantes. Así pues, debemos diferenciar dos situaciones en función de cómo se han tomado las diferentes medidas de los astros: medidas simultaneas o casi simultaneas y medidas no simultaneas.

En el primer caso, cuando son simultáneas o el tiempo que transcurre es muy pequeño, si hemos sido cuidadosos en la toma de las mediciones podremos suponer que la mayor parte del error es sistemático. Por tanto, este error total es casi el mismo en ambas rectas. Así pues, el método de las bisectrices de altura será muy recomendado.

En el segundo caso, cuando no son simultaneas, debemos considerar que una parte importante del error será accidental. Esto es debido a que deberemos trasladar la segunda recta a la posición de la primera para su intersección. En este proceso se pueden cometer muchas imprecisiones que darán lugar a errores accidentales, distintos en cada una de las rectas de altura, por lo que el error total de cada recta ya no será el mismo. Estas, aunque paralelas a la que teníamos, no se situarán a la misma distancia de las mismas ya que el  $\epsilon_t$  ( $\epsilon_s + \epsilon_a$ ) será de distinto valor. Esto provocará que el punto de nuestra situación real ya no se sitúe sobre esa bisectriz de ambas rectas de altura, por lo que ya no tiene sentido este método. De todas formas más adelante veremos una mejora del mismo.

Además tampoco es recomendable el uso de este método cuando hay involucrado una diferencia de azimutes menor de  $60^\circ$  ya que cuando esta es menor, la situación real se aleja también de la bisectriz de altura.

En la siguiente imagen, la *figura 27*, podemos ver la construcción grafica que se utiliza para este método cuando tenemos 3 rectas de altura. En cada una de las 3 intersecciones de las rectas de altura (los vértices del triángulo), trazamos sus 2 azimuts correspondientes a las mismas. Se hace la bisectriz de cada uno de estos pares de azimuts para obtener la bisectriz de altura de ese par de rectas. La intersección de las 3 bisectrices de altura nos dará nuestra situación observada.

No obstante, en esta imagen se puede observar, además de cómo se realiza el procedimiento para la obtención de la situación, que en este caso nos queda muy alejado del interior triángulo formado por nuestras rectas. Pues bien, en este caso, al tener una diferencia de azimutes menor de  $60^\circ$  entre  $Z_1$  y  $Z_3$  y la suma de todos ellos inferior a  $180^\circ$ , es uno de los casos mencionados anteriormente en los que este método no es recomendable por darnos menos precisión de los que nos daría el punto situado en el centro geométrico del triángulo.



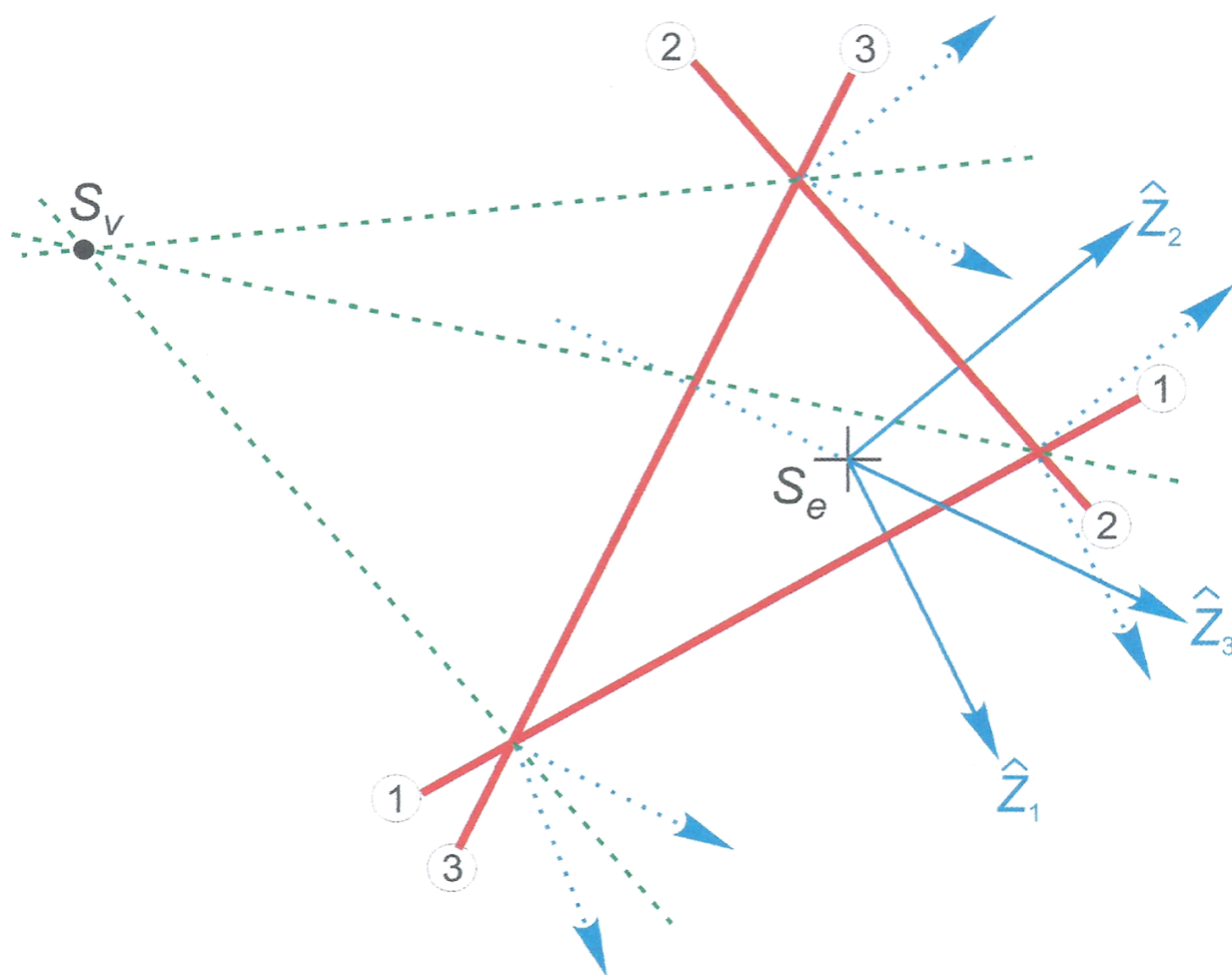


Figura 27. Método de las Bisectrices de altura con 3 rectas de altura (Mederos, Luis. *Navegación Astronómica*)

A continuación, se expondrán y explicarán 3 métodos diferentes para la realización del mismo ejercicio en todos los casos. Estos se acompañarán de una serie de ejercicios resueltos realizados durante la navegación oceánica a la altura de la costa de Mauritania y cerca de las islas de Cabo Verde.

En primer lugar se realizará un ejercicio explicando paso por paso como es la metodología del sistema para la resolución de ejercicio, que puede servir además a modo de plantilla.

En segundo lugar se realizarán los mismos ejercicios con los 3 métodos diferentes y se procederá a la comparación de los resultados.

En todos los ejercicios, a efectos de cálculo, el error de índice del sextante es  $-0.4$  y la elevación del observador 13.5 metros.

## Capítulo 5. Método de tangentes de rectas de altura tradicional

Este método es sin duda el más utilizado y conocido en la navegación astronómica. Como ya se ha explicado anteriormente su peculiaridad es que nos permite dibujar un fragmento de la circunferencia de alturas iguales (tan pequeño que se puede considerar una recta, la recta de altura) sin necesidad de conocer su centro. Esto nos permite trazar la recta en cartas de punto mayor y obtener una buena precisión. El método que se utiliza es el de la tangente Marq Saint-Hilaire en honor al marino francés que lo descubrió. Aunque ha habido otros métodos este es el que finalmente se impuso por su sencillez. La peculiaridad de este método es la necesidad de una estima previa.

La metodología de resolución se divide en 2 partes:

- En primer lugar se realizan una serie de cálculos basándonos en nuestra posición estimada y en los datos tomados del astro, con la ayuda del ya estudiado triángulo de posición y gracias a los datos del astro que nos da el Almanaque Náutico del año en vigor. Para la resolución del triángulo se utilizarán, en este caso, 2 fórmulas matemáticas:

$$\sin a_e = \sin \varphi_e * \sin \delta + \cos \varphi_e * \cos \delta * \cos P \quad (1)$$

$$\tan Zv = \frac{\sin P}{\tan \delta * \cos \varphi_e - \sin \varphi_e * \cos P} \quad \text{donde } \left\{ \begin{array}{l} \text{si } Zv > 0 \rightarrow N(Zv) \\ \text{si } Zv < 0 \rightarrow S(Zv) \end{array} \right\} \text{ y donde } \left\{ \begin{array}{l} \text{si } P \text{ al } E \rightarrow (Zv)E \\ \text{si } P \text{ al } W \rightarrow (Zv)W \end{array} \right\} \quad (2)$$

Estos dos datos conforman el determinante del astro, lo que necesitaremos para su trazado en la carta.

- Una vez obtenidos todos los datos necesarios, podemos revolver el ejercicio de manera gráfica sobre una carta y obtener la posición. Realmente lo que obtenemos es una variación en latitud y longitud, que aplicándolo a la situación de estima inicial nos dará nuestra situación real.

En los ejercicios que vienen a continuación, el astro ha sido previamente identificado o bien con el uso del *star finder* o bien con su pertinente cálculo de reconocimiento de astros, si bien este no se incluye.

## 5.1 EJERCICIO EXPLICATIVO

A 17/11/2017 19:06:53 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^{\circ} 00' N$   $L = 019^{\circ} 00' W$  tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $35^{\circ} 36.5'$  y  $Zv = 164^{\circ}$ . Seguimos navegando con  $Rv = 240^{\circ}$  y a 8 nudos hasta las 19:13:59 UTC donde tomamos  $a_i$  de Caph  $44^{\circ} 19.7'$  y  $Zv = 040^{\circ}$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:16:12 tomamos  $a_i$  de Vega  $46^{\circ} 06.6'$  y  $Zv = 308^{\circ}$ .

El ejercicio consiste en, para cada una de las estrellas, calcular su determinante para luego poder trazar cada una de las rectas de altura y ver dónde interseccionan. Ya que, aunque breve, hay una navegación entre cada medición, para mayor precisión debemos hacer un traslado de las rectas. Hay varias formas de hacerlo, pero en este caso se opta por calcular la nueva situación de estima para cada toma de datos teniendo en cuenta el rumbo y la velocidad que llevamos.

Una de las coordenadas horarias de los astros no la encontramos directamente en el Almanaque. Esta están referencias a la estrella Aries ( $\Upsilon$ ) dándonos su ángulo sidéreo (AS) que es ángulo de ecuador (el horario) desde Aries hasta el círculo horario del astro en cuestión.

### Fomalhaut

$hGY_{(19.00)} = 342^{\circ} 01.3'$	Los datos están tabulados en horas redondas. Debemos buscar la anterior y
$hGY_{(20.00)} = 357^{\circ} 03.8'$	la posterior a la hora de la observación del horario de Greenwich de Aries
corrección = $1^{\circ} 43.5'$	Aplicamos la corrección correspondiente que podemos encontrar en el AN
$hGY = 343^{\circ} 44.85'$	Sumando la corrección a la primera hora, obtenemos el valor de $hGY$
$Le = 019^{\circ} 00.0' W$	Nuestra longitud de estima que nos da el enunciado
$hLY = 324^{\circ} 44.83'$	Resultado de $hGY + Le = hLY$ . Se resta al ser la $Le$ al $W$
$AS^* = 015^{\circ} 20.6'$	Dato obtenido del AN
$hL^* = 340^{\circ} 05.4'$	Resultado de $hLY + AS^* = hL^*$ .
$P^* = 19^{\circ} 54.6' E$	Al ser $hL^* > 180$ ; $P^* = 360 - hL^*$ . Es, por tanto, un polo al $E$
$\delta = -29^{\circ} 31.8'$	Obtenido entrando en el AN con la fecha exacta
$a_e = 35^{\circ} 57.2'$	Ya tenemos todos los datos necesario para la resolución del triángulo de posición. Aplicando la formula (1) obtenemos la $a_e$ y con la formula (2) el $Zv$ , que vemos que es el mismo que medimos con la alidada, señal de que los cálculos son correctos. El resultado dado en el cuadrantal y lo pasamos a circular.
$Zv = S21E = 164^{\circ}$	
$a_i = 35^{\circ} 36.5'$	Altura el astro medida con el sextante que nos da el enunciado
$e.i. = -0.4$	El error estudiado en el capítulo 3, que en este caso restamos a la $a_i$
$a_o = 35^{\circ} 36.1'$	Valor de la altura observada de la estrella
$c/D = -6.6$	Corrección por depresión obtenida en el AN con el valor de nuestra $eo$ 13.5m
$a_a = 35^{\circ} 29.5'$	Valor de la altura aparente de la estrella
$C/R = -1.4$	Corrección por refracción del AN con el valor de la altura aparente
$a_v = 35^{\circ} 28.1'$	Resultado final de la altura verdadera del astro
<b><math>\Delta a = -29.1'</math></b>	Resultado de altura verdadera – altura estimada. El signo es importante, ya que será determinante en la resolución gráfica. La $\Delta a$ es muy grande al ser la estima poco precisa. Estos dos datos conforman el determinante del astro.
<b><math>Zv = 158.5^{\circ}</math></b>	

A continuación, antes de pasar a realizar cálculos del siguiente astro, debemos calcular la nueva situación de estima teniendo en cuenta el tiempo que hemos navegado a una velocidad y un rumbo entre toma y toma de mediciones del astro. Esta nueva situación es la que usaremos para los cálculos y que conformarán el nuevo triángulo de posición a resolver para la obtención del determinante del siguiente astro. Este proceso se realizará igualmente para todos los astros siempre y cuando no sean totalmente simultáneos, cobrando más importancia cuando mayor sea el tiempo transcurrido y aún más cuanto mayor sea la velocidad del buque.

$R = 240^\circ$	Rumbo del buque durante la navegación entre medidas
$V = 8$ nudos	Velocidad media del trayecto
$t = 7' 6''$	Tiempo transcurrido entre ambas mediciones; 19:06:53 - 19:13:59
$d = 0.946$ millas	Producto de la velocidad por el tiempo
$\Delta\varphi = 0.47 S$	Se obtiene de la fórmula $\Delta\varphi = dn * \cos R$
$\varphi_m = 20.996$	Con el valor de $\varphi$ inicial más la variación se hace la media de ambas latitudes
$A = 0.826$	El apartamento se obtiene de la fórmula $\Delta = dn * \sin R$
$\Delta L = 0.885 W$	Se obtiene de la formula $\Delta L = A / \cos \varphi_m$
$\varphi_2 = 20^\circ 59.5' N$	Obtenemos el nuevo valor de la latitud de estima para los próximos cálculos
$L_2 = 019^\circ 00.885' W$	Nuevo valor de la longitud de estima para los próximos cálculos

Una vez obtenida la nueva posición de estima, el resto del ejercicio se hace exactamente de la misma forma como ya se ha explicado con los astros restantes, por lo que ya no se explicara paso a paso.

### Caph

$hGY_{(19.00)} = 342^\circ 01.3'$	$a_i = 44^\circ 19.7'$
$hGY_{(20.00)} = 357^\circ 03.8'$	$e.i = -0.4$
corrección = $3^\circ 30.3'$	$a_o = 44^\circ 19.3'$
$hGY = 345^\circ 31.6'$	$c/D = -6.6$
$Le = 019^\circ 00.885' W$	$a_a = 44^\circ 12.7'$
$hLY = 326^\circ 30.75'$	$C/R = -1.1$
$AS^* = 357^\circ 27.5'$	$a_v = 44^\circ 11.6'$
$hL^* = 323^\circ 58.2'$	
$P^* = 36^\circ 01.8' E$	<b><math>\Delta a = +15.2'</math></b>
$\delta = 59^\circ 15.1'$	<b><math>Zv = 024.7^\circ</math></b>
$a_e = 43^\circ 56.4'$	
$Zv = N24.7E = 024.7^\circ$	

$R = 240^\circ$	$\varphi_m = 20.99$
$V = 8$ nudos	$A = 0.258$
$t = 2' 13''$	$\Delta L = 0.276 W$
$d = 0.297$ millas	$\varphi_2 = 20^\circ 59.351' N$
$\Delta\varphi = 0.149 S$	$L_2 = 019^\circ 01.16' W$

## Vega

$$hGY_{(19.00)} = 342^{\circ} 01.3'$$

$$hGY_{(20.00)} = 357^{\circ} 03.8'$$

$$\text{corrección} = 4^{\circ} 3.65'$$

$$hGY = 346^{\circ} 04.95'$$

$$Le = 019^{\circ} 01.16'W$$

$$hLY = 327^{\circ} 03.8'$$

$$AS^* = 086^{\circ} 37.3'$$

$$hL^* = 047^{\circ} 41.1'$$

$$P^* = 047^{\circ} 41.1'W$$

$$\delta = 38^{\circ} 48.4'$$

$$a_e = 45^{\circ} 35.05'$$

$$Zv = N55.4W = 304.6^{\circ}$$

$$a_i = 49^{\circ} 06.6'$$

$$e.i = -0.4$$

$$a_o = 46^{\circ} 06.2'$$

$$c/D = -6.6$$

$$a_a = 45^{\circ} 59.6'$$

$$C/R = -1.0$$

$$a_v = 45^{\circ} 58.6'$$

$$\Delta a = +23.5'$$

$$Zv = 304.6^{\circ}$$

Una vez tenemos los valores de los 3 determinantes, usaremos una carta o bien nos la fabricaremos nosotros, tal como se ve en el *figura 28*. Para ello debemos trazar los ejes verticales y horizontales, equivalentes a la latitud y longitud. Las longitudes pueden medirse directamente sobre el eje horizontal, no obstante, las latitudes no. Esto se debe a que, al ser la tierra esférica, al plasmarla sobre una carta plana esta se ve deformada. Para tomar las medidas debemos hacer la escala que veremos abajo (1), donde se traza un ángulo cuyo valor es el de la latitud de estima inicial, en esa "hipotenusa" es donde se marcarán las medidas verticales que se trasladarán hacia la escala marcada de abajo (2) para obtener los valores reales. Es importante seleccionar correctamente los valores de esta. Cuanto mayor sean la escala, más precisión tendrá el resultado gráfico. En este caso se coge el máximo valor de la escala como el máximo valor de las diferencias de alturas, en valor absoluto.

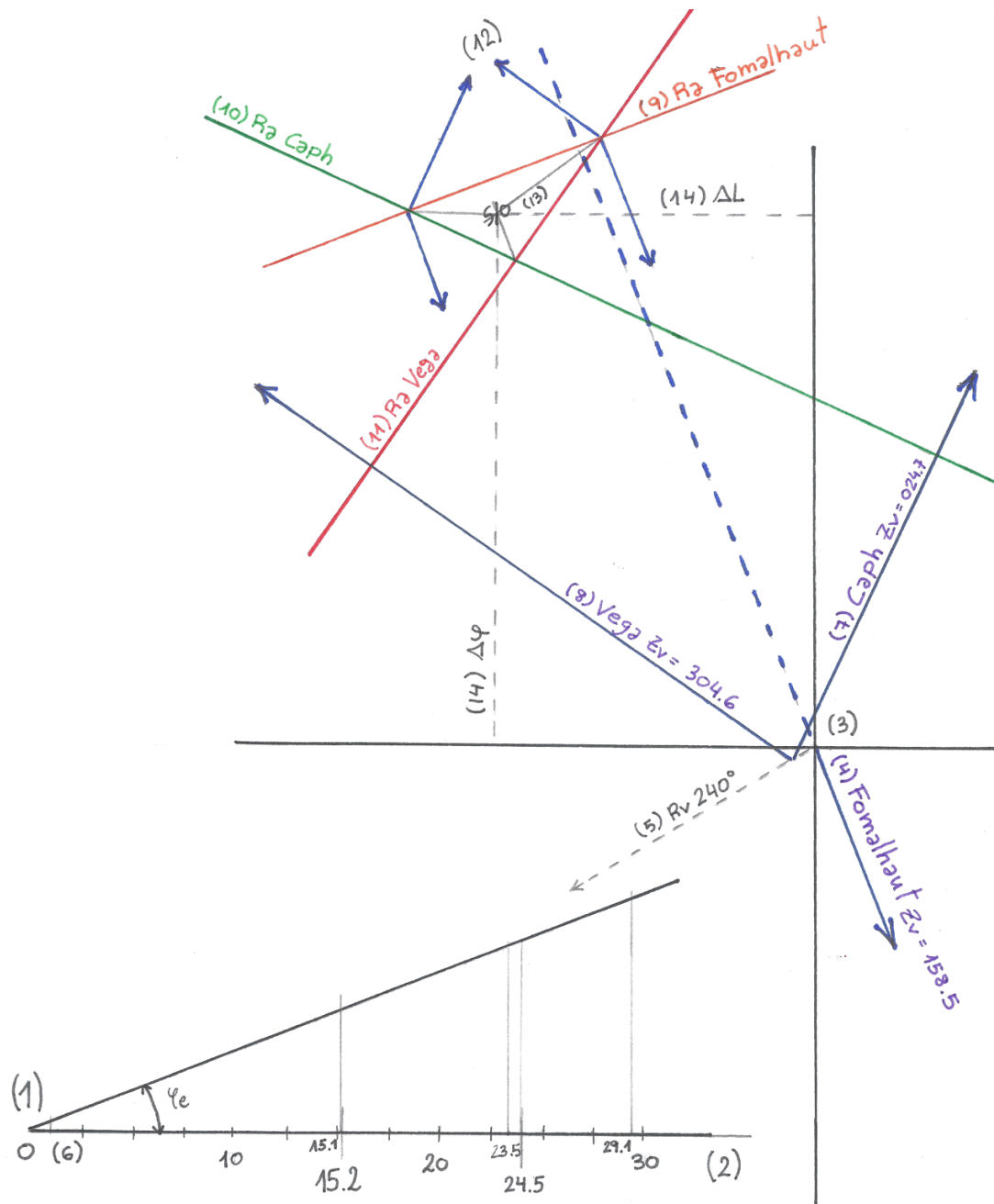
Colocaremos la s/e inicial en el centro de nuestros ejes de coordenadas (3) y desde allí trazaremos el azimut de nuestro primer astro, Fomalhaut (4). A continuación, trazaremos desde la s/e nuestro rumbo (5) y trasladaremos la distancia navegada, que habremos medido previamente en la escala (6). Vemos que esta es muy pequeña en relación a la misma. Desde allí, trazaremos el azimut de nuestro segundo astro, Caph (7). Deberíamos realizar el mismo proceso de traslado de la posición de estima con el siguiente astro, pero debido a lo insignificante que es, en este caso no se ha realizado. Trazamos entonces azimut de Vega (8).

El siguiente paso es trazar las rectas de altura a la distancia de la  $\Delta a$  correspondiente. Cabe destacar que si esa es positiva, se trazara en dirección al azimut, pero si esta es negativa, en la dirección inversa, como en el caso de Fomalhaut. Trazamos las rectas de altura de Fomalhaut (9), Caph (10) y Vega (11).

Vemos que estas no interseccionan en un solo punto sino que nos forman un triángulo. Debido a que entre las mediciones ha transcurrido un periodo de tiempo corto y que no hay diferencias de azimutes inferiores a 60 grados, en este caso optaremos por el método de las bisectrices de altura. Así pues trazamos en cada uno de los vértices los azimutes correspondientes a los astros de la intersección de las rectas de altura que se da en ellos (12) (en realidad con 2 es suficiente). Realizamos la bisectriz de estas

y vemos que nos dan la intersección en un punto que además coincide aproximadamente con el centro geométrico del triángulo. Esta es nuestra situación observada s/o (13).

Por último, medimos la distancia del punto a los ejes verticales y horizontales (14) y la trasladamos a la escala. Obtenemos  $\Delta\varphi = 24.5 \text{ N}$  y  $\Delta L = 15.2 \text{ W}$



**Figura 28. Resolución gráfica del ejercicio por el método tradicional Saint Hilaire (propia)**

Por tanto, el resultado final queda:

$$\varphi_e = 21^{\circ} 00' \text{ N}$$

$L_e = 019^{\circ} 00' \text{ W}$

$$\Delta\varphi = 24.5 \text{ N}$$
$$\Delta L = 15.2 \text{ W}$$
$$\varphi_0 = 21^{\circ} 24.5' N$$
$$L_e = 0.19^{+0.15}_{-0.15} \text{ W}$$

Siendo la posición real del buque ya conocida gracias al GPS del barco  $\varphi = 21^{\circ} 22.654'N$   
 $L = 019^{\circ} 14.196'W$  podemos comparar los resultados y nos dan un error de 2.07 millas.

## 5.2 EJERCICIO 1

A 21/11/2017 19:04:04 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^\circ 00' N$   $L = 019^\circ 00' W$  tomamos  $a_i$  de Vega  $45^\circ 30.5'$  y  $Zv = 310^\circ$ . Seguimos navegando con  $Rv = 058.8^\circ$  y a 8 nudos hasta las 19:07:59 UTC donde tomamos  $a_i$  de Altair  $57^\circ 59.2'$  y  $Zv = 250^\circ$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:11:03 tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $36^\circ 59.2'$  y  $Zv = 168^\circ$ .

### Vega

$hGY_{(19.00)} = 345^\circ 57.9'$	$a_i = 45^\circ 30.5'$
$hGY_{(20.00)} = 001^\circ 00.4'$	$e.i = -0.4$
corrección = $1^\circ 01.2'$	$a_o = 45^\circ 30.1'$
$hGY = 346^\circ 59.1'$	$c/D = -6.6$
$Le = 019^\circ 00.0' W$	$a_a = 45^\circ 23.5'$
$hLY = 327^\circ 59.1'$	$C/R = -1.0$
$AS^* = 080^\circ 37.3'$	$a_v = 45^\circ 22.5'$
$hL^* = 048^\circ 36.35'$	
$P^* = 48^\circ 36.35' W$	<b><math>\Delta a = +29.6'</math></b>
$\delta = +38^\circ 48.4'$	<b><math>Zv = 304.5^\circ</math></b>
$a_e = 44^\circ 52.87'$	
$Zv = N55.6W = 304.5^\circ$	

$R = 058.8^\circ$	$\varphi_m = 21.00225$
$V = 8$ nudos	$A = 0.23$
$t = 3' 55''$	$\Delta L = 0.248'E$
$d = 0.538$ millas	$\varphi_2 = 21^\circ 00.27' N$
$\Delta\varphi = 0.27' N$	$L_2 = 018^\circ 59.752' W$

### Altair

$hGY_{(19.00)} = 345^\circ 57.9'$	$a_i = 57^\circ 59.2'$
$hGY_{(20.00)} = 001^\circ 00.4'$	$e.i = -0.4$
corrección = $2^\circ 00.5'$	$a_o = 57^\circ 58.8'$
$hGY = 347^\circ 57.95'$	$c/D = -6.6$
$Le = 018^\circ 59.752' W$	$a_a = 57^\circ 52.2'$
$hLY = 328^\circ 58.2'$	$C/R = -0.7$
$AS^* = 062^\circ 05.5'$	$a_v = 57^\circ 51.5'$
$hL^* = 031^\circ 03.7'$	
$P^* = 31^\circ 03.7' W$	<b><math>\Delta a = +7.35'</math></b>
$\delta = 08^\circ 55.2'$	<b><math>Zv = 252.7^\circ</math></b>
$a_e = 57^\circ 44.15'$	
$Zv = S72.7W = 252.7^\circ$	



$R = 058.8^\circ$	$\varphi_m = 21.007$
$V = 8$ nudos	$A = 0.181$
$t = 3' 04''$	$\Delta L = 0.1957 W$
$d = 0.4101$ millas	$\varphi_2 = 21^\circ 00.48' N$
$\Delta\varphi = 0.21' N$	$L_2 = 018^\circ 59.5773' W$

#### Fomalhaut

$hGY_{(19.00)} = 345^\circ 57.9'$	
$hGY_{(20.00)} = 001^\circ 00.4'$	$a_i = 36^\circ 59.2'$
corrección = $2^\circ 46.2'$	$e.i = -0.4$
$hGY = 348^\circ 44.1'$	$a_o = 36^\circ 58.8'$
$Le = 018^\circ 59.5773' W$	$c/D = -6.6$
$hLY = 329^\circ 44.5'$	$a_a = 36^\circ 52.2'$
$AS^* = 015^\circ 20.6'$	$C/R = -1.3$
$hL^* = 345^\circ 05.1'$	$a_v = 36^\circ 50.9'$
$P^* = 14^\circ 54.9' E$	
$\delta = -29^\circ 31.8'$	$\Delta a = -36.6'$
$a_e = 37^\circ 27.5'$	$Zv = 163.6^\circ$
$Zv = S16.4E = 163.6^\circ$	

Como podemos observar en la *figura 29* en este caso se opta por no usar el método de las bisectrices de altura debido a que hay involucrada una diferencias de azimuts entre Vega y Altair menor de  $60^\circ$ .

Por tanto, el resultado final queda:

$\varphi_e = 21^\circ 00' N$	$L_e = 019^\circ 00' W$
$\Delta\varphi = 33' N$	$\Delta L = 16.2 W$
-----	-----
$\varphi_o = 21^\circ 33' N$	$L_e = 019^\circ 16.2 W$

Siendo la posición real del barco ya conocida gracias al GPS del barco  $\varphi = 21^\circ 30.945' N$   $L = 019^\circ 20.064' W$  podemos comparar los resultados y nos dan un error de 4.15 millas.

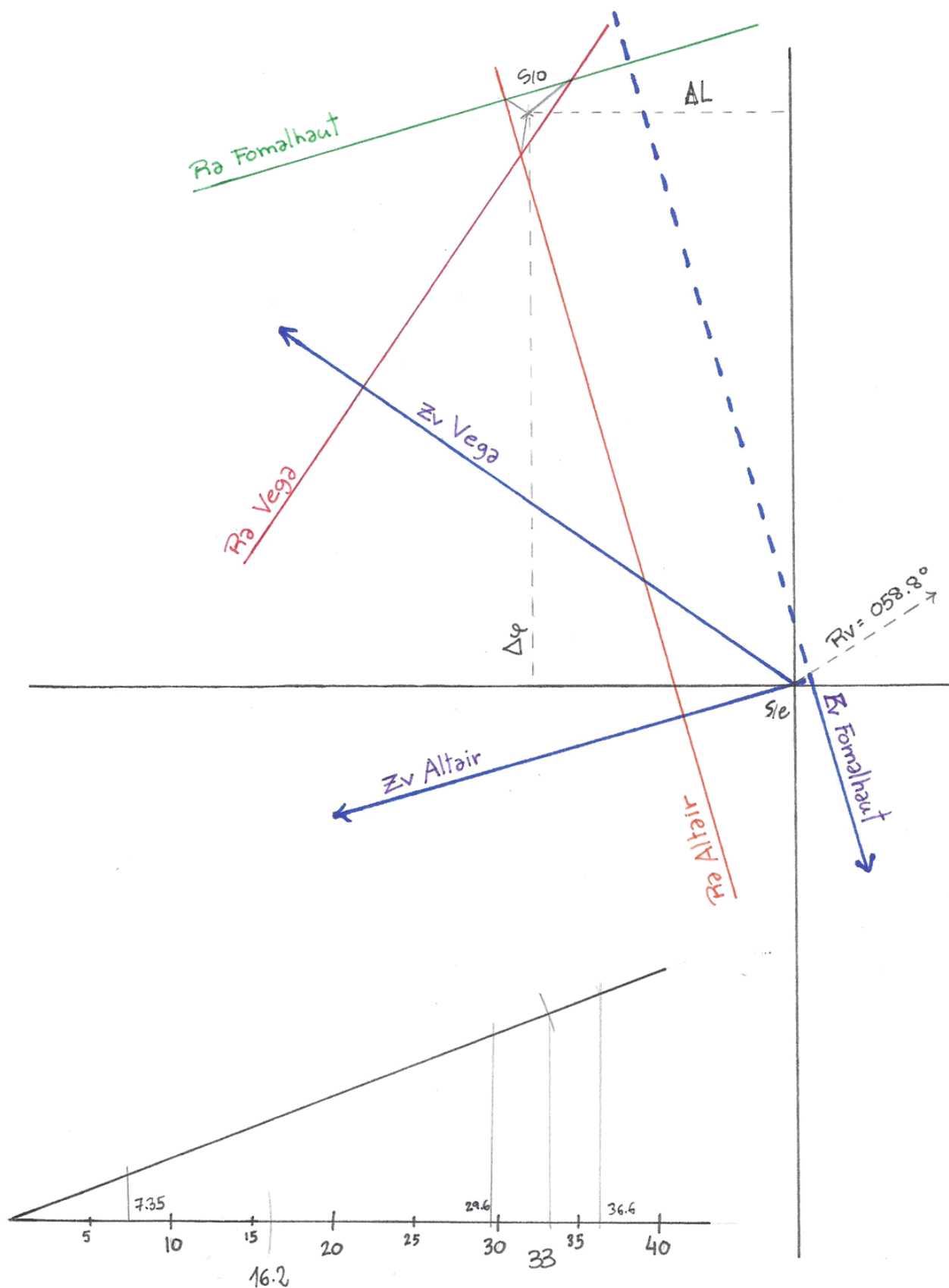


Figura 29. Resolución gráfica del ejercicio 1 por el método tradicional Saint Hilaire (propia)

### 5.3 EJERCICIO 2

A 20/11/2017 18:58:03 UTC en situación estimada  $\varphi = 22^\circ 00' N$   $L = 019^\circ 30' W$  tomamos  $a_i$  de la Luna  $16^\circ 06.6'$  y  $Zv = 238^\circ$ . Seguimos navegando con  $Rv = 054.9^\circ$  y a 4.4 nudos hasta las 19:09:30 UTC donde tomamos  $a_i$  de Deneb  $62^\circ 07.6'$  y  $Zv = 320^\circ$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:14:16 tomamos  $a_i$  de Hamal  $32^\circ 48.6'$  y  $Zv = 075^\circ$ .

#### Luna

$hG_{L(18.00)} = 066^\circ 505'$	$a_i = 16^\circ 06.6'$
$hG_{L(19.00)} = 081^\circ 21.7'$	$e.i = -0.4$
corrección = $14^\circ 02.9'$	$a_o = 16^\circ 06.2'$
$hG_L = 080^\circ 53.4'$	$c/D = -6.6$
$Le = 019^\circ 30.0' W$	$a_a = 15^\circ 59.6'$
$hL = 061^\circ 23.4'$	$PHE = 54.1$
$P_i = 61^\circ 23.4' W$	$C/R.P.SD = 63.4'$
$\delta = -19^\circ 13.3'$	$a_v = 17^\circ 03.0'$
$a_e = 17^\circ 12.68'$	
$Zv = S60.2W = 240.2^\circ$	<b><math>\Delta a = -9.7'</math></b> <b><math>Zv = 240.2^\circ</math></b>
$R = 054.9^\circ$	$\varphi_m = 22.0041$
$V = 4.4$ nudos	$A = 0.68$
$t = 11' 27''$	$\Delta L = 0.735'E$
$d = 0.833$ millas	<u><math>\varphi_2 = 22^\circ 00.50' N</math></u>
$\Delta\varphi = 0.48' N$	<u><math>L_2 = 019^\circ 29.26' W</math></u>

#### Deneb

$hGY_{(19.00)} = 344^\circ 58.8'$	$a_i = 62^\circ 07.6'$
$hGY_{(20.00)} = 000^\circ 01.2'$	$e.i = -0.4$
corrección = $2^\circ 22.9'$	$a_o = 62^\circ 07.2'$
$hGY = 347^\circ 21.7'$	$c/D = -6.6$
$Le = 019^\circ 29.26' W$	$a_a = 62^\circ 00.6'$
$hLY = 327^\circ 52.4'$	$C/R = -0.5$
$AS^* = 049^\circ 29.6'$	$a_v = 62^\circ 00.1'$
$hL^* = 017^\circ 21.0'$	
$P^* = 17^\circ 21.0' W$	<b><math>\Delta a = -40.7'</math></b> <b><math>Zv = 332.8^\circ</math></b>
$\delta = +45^\circ 21.0'$	
$a_e = 62^\circ 40.8'$	
$Zv = N27.2W = 332.8^\circ$	

$$\begin{array}{ll}
 R = 054.9^\circ & \varphi_m = 22.01 \\
 V = 4.4 \text{ nudos} & A = 0.284 \\
 t = 4' 46'' & \Delta L = 0.21 \text{ E} \\
 d = 0.3467 \text{ millas} & \varphi_2 = 22^\circ 00.70' \text{ N} \\
 \Delta\varphi = 0.199' \text{ N} & L_2 = 019^\circ 28.95' \text{ W}
 \end{array}$$

### Hamal

$$\begin{array}{ll}
 hGY_{(19.00)} = 344^\circ 58.8' & a_i = 32^\circ 48.6' \\
 hGY_{(20.00)} = 000^\circ 01.2' & e.i = -0.4 \\
 \text{corrección} = 3^\circ 34.5' & a_o = 32^\circ 48.2' \\
 hGY = 348^\circ 33.27' & c/D = -6.6 \\
 Le = 019^\circ 28.95' \text{ W} & a_a = 32^\circ 41.6' \\
 hLY = 329^\circ 04.4' & C/R = -1.6 \\
 AS^* = 327^\circ 57.1' & a_v = 32^\circ 40.0' \\
 hL^* = 297^\circ 01.5' & \\
 P^* = 23^\circ 32.8' \text{ E} & \\
 \delta = +23^\circ 32.8' & \Delta a = +15.6' \\
 a_e = 32^\circ 24.37' & Zv = 075.3^\circ \\
 Zv = N75.3E = 075.3^\circ &
 \end{array}$$

Como podemos observar en la *figura 30* en este caso se opta por usar el método de las bisectrices de altura.

Por tanto, el resultado final queda:

$$\begin{array}{ll}
 \varphi_e = 22^\circ 00' \text{ N} & L_e = 019^\circ 30' \text{ W} \\
 \Delta\varphi = 30.1' \text{ S} & \Delta L = 29.0 \text{ E} \\
 \hline
 \varphi_o = 21^\circ 29.9' \text{ N} & L_e = 019^\circ 01.0 \text{ W}
 \end{array}$$

Siendo la posición real del barco ya conocida gracias al GPS del barco  $\varphi = 21^\circ 31.140' \text{ N}$   $L = 018^\circ 59.343' \text{ W}$  podemos comparar los resultados y nos dan un error de 1.99 millas.

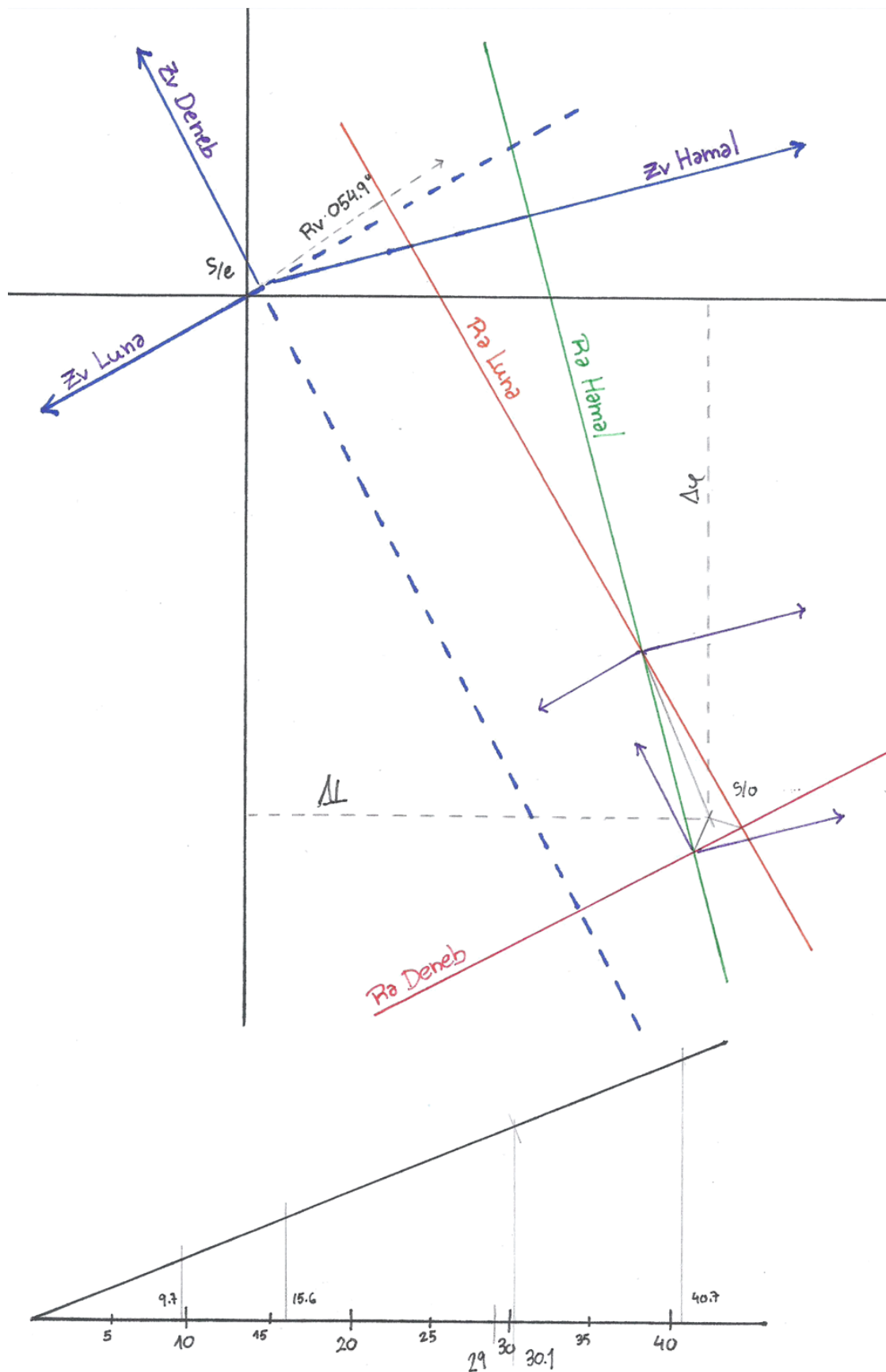


Figura 30. Resolución gráfica del ejercicio 2 por el método tradicional Saint Hilaire (propia)

### 5.4 EJERCICIO 3

A 07/11/2017 19:07:16 UTC en situación estimada  $\varphi = 22^{\circ} 00' N$   $L = 020^{\circ} 00' W$  tomamos  $a_i$  de Deneb  $66^{\circ} 02.7'$  y  $Zv = 357^{\circ}$ . Seguimos navegando con  $Rv = 327^{\circ}$  y a 8 nudos hasta las 19:09:54 UTC donde tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $31^{\circ} 43.6'$  y  $Zv = 147^{\circ}$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:22:41 tomamos  $a_i$  de Altair  $66^{\circ} 32.6'$  y  $Zv = 230^{\circ}$ .

#### Deneb

$hGY_{(19.00)} = 332^{\circ} 09.9'$	$a_i = 66^{\circ} 02.7'$
$hGY_{(20.00)} = 347^{\circ} 12.4'$	$e.i = -0.1$
corrección = $1^{\circ} 49.3'$	$a_o = 66^{\circ} 02.8'$
$hGY = 333^{\circ} 59.2'$	$c/D = -6.6$
$Le = 020^{\circ} 00.0' W$	$a_a = 65^{\circ} 56.2'$
$hLY = 313^{\circ} 59.2'$	$C/R = -0.5$
$AS^* = 049^{\circ} 29.6'$	$a_v = 65^{\circ} 55.7'$
$hL^* = 003^{\circ} 28.7'$	
$P^* = 03^{\circ} 28.7' W$	
$\delta = +45^{\circ} 21.0'$	<b><math>\Delta a = -32.9'</math></b>
$a_e = 66^{\circ} 28.6'$	<b><math>Zv = 354^{\circ}</math></b>
$Zv = N6W = 354^{\circ}$	

$R = 327^{\circ}$	$\varphi_m = 22.0025$
$V = 8$ nudos	$A = 0.1609$
$t = 2' 38''$	$\Delta L = 0.1735' W$
$d = 0.3522$ millas	$\varphi_2 = 22^{\circ} 00.3' N$
$\Delta\varphi = 0.2954' N$	$L_2 = 020^{\circ} 00.17' W$

#### Fomalhaut

$hGY_{(19.00)} = 332^{\circ} 09.9'$	$a_i = 31^{\circ} 43.6'$
$hGY_{(20.00)} = 347^{\circ} 12.4'$	$e.i = -0.1$
corrección = $2^{\circ} 28.7'$	$a_o = 31^{\circ} 43.7'$
$hGY = 334^{\circ} 38.7'$	$c/D = -6.6$
$Le = 020^{\circ} 00.17' W$	$a_a = 31^{\circ} 37.1'$
$hLY = 314^{\circ} 38.6'$	$C/R = -1.7$
$AS^* = 015^{\circ} 20.6'$	$a_v = 31^{\circ} 35.4'$
$hL^* = 329^{\circ} 59.25'$	
$P^* = 30^{\circ} 00.75' E$	
$\delta = -29^{\circ} 31.8'$	<b><math>\Delta a = +40.1'</math></b>
$a_e = 30^{\circ} 55.3'$	<b><math>Zv = 149.5^{\circ}</math></b>
$Zv = S30.48E = 149.5^{\circ}$	

$R = 327^\circ$	$\varphi_m = 22.01697$
$V = 8$ nudos	$A = 0.781$
$t = 12' 47''$	$\Delta L = 0.8424' W$
$d = 1.71$ millas	$\varphi_2 = 22^\circ 01.73' N$
$\Delta\varphi = 1.43' N$	$L_2 = 020^\circ 01.0' W$

#### Altair

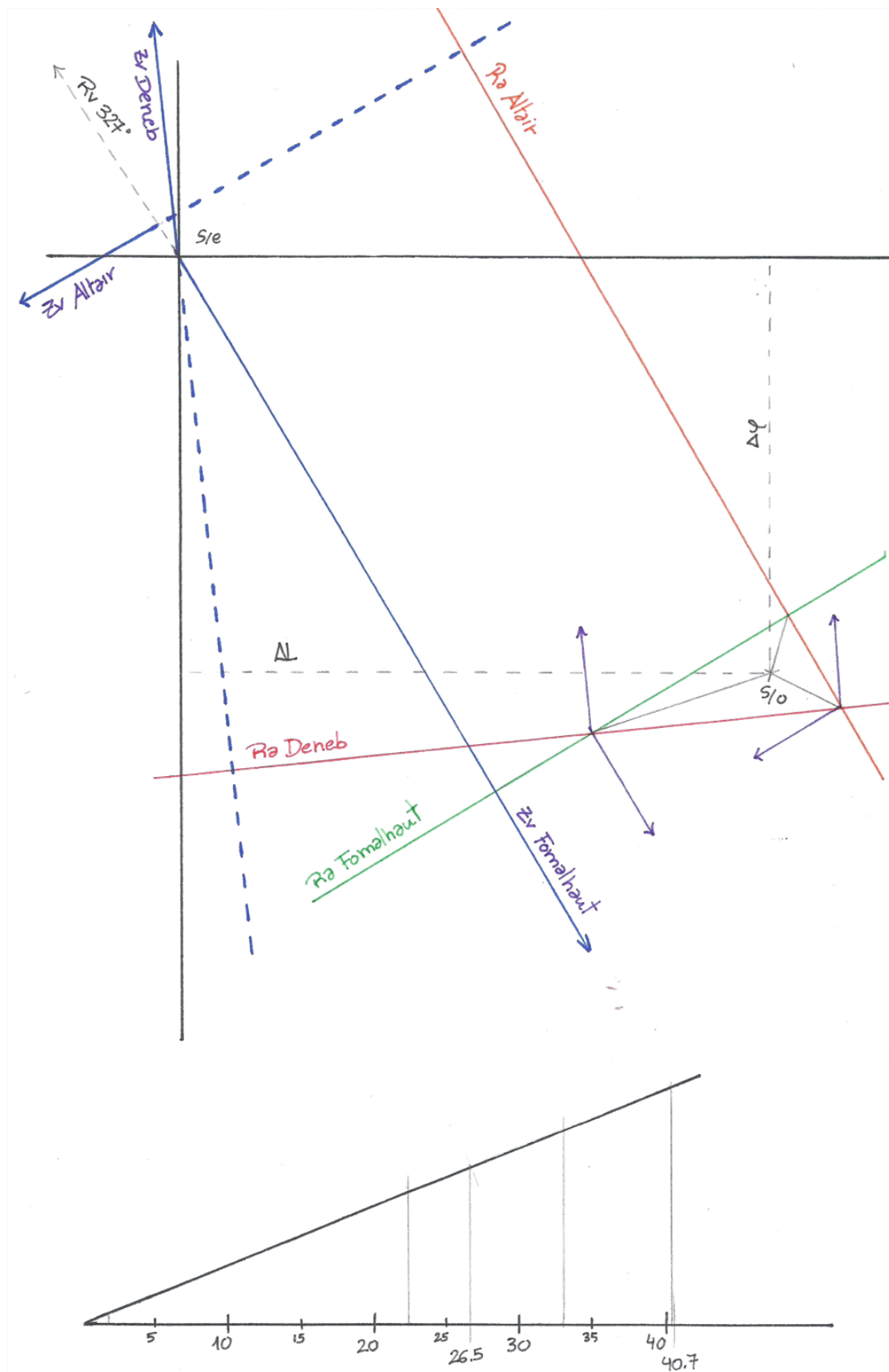
$hGY_{(19.00)} = 332^\circ 09.9'$	
$hGY_{(20.00)} = 347^\circ 12.4'$	$a_i = 66^\circ 32.6'$
corrección = $5^\circ 41.2'$	$e.i = -0.1$
$hGY = 337^\circ 50.1'$	$a_o = 66^\circ 32.7'$
$Le = 020^\circ 01.0' W$	$c/D = -6.6$
$hLY = 317^\circ 50.1'$	$a_a = 66^\circ 26.1'$
$AS^* = 062^\circ 05.5'$	$C/R = -0.5$
$hL^* = 019^\circ 55.6'$	$a_v = 66^\circ 25.6'$
$P^* = 19^\circ 55.6' W$	
$\delta = +08^\circ 55.2'$	$\Delta a = -22.2'$
$a_e = 66^\circ 47.8'$	$Zv = 240^\circ$
$Zv = S58.7W = 240^\circ$	

Como podemos observar en la *figura 31* en este caso se opta por usar el método de las bisectrices de altura.

Por tanto, el resultado final queda:

$\varphi_e = 22^\circ 00' N$	$L_e = 020^\circ 00' W$
$\Delta\varphi = 26.5' S$	$\Delta L = 40.7 E$
-----	-----
$\varphi_o = 21^\circ 33.5' N$	$L_e = 019^\circ 19.3 W$

Siendo la posición real del barco ya conocida gracias al GPS del barco  $\varphi = 21^\circ 34' N$   $L = 019^\circ 21' W$  podemos comparar los resultados y nos dan un error de 1.66 millas.



**Figura 31. Resolución gráfica del ejercicio 3 por el método tradicional Saint Hilaire (propia)**



### 5.5 EJERCICIO 4

A 19/11/2017 y con el buque parado en DP a las 19:03:34 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^\circ 00' N$   $L = 019^\circ 00' W$  tomamos  $a_i$  de Vega  $47^\circ 07.7'$  y  $Zv = 305^\circ$ . A las 19:08:27 UTC tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $36^\circ 27.6'$  y  $Zv = 165^\circ$  y a las 19:16:21 tomamos  $a_i$  de Hamal  $31^\circ 54.7'$  y  $Zv = 080^\circ$ .

#### Vega

$hGY_{(19.00)} = 343^\circ 59.6'$	$a_i = 47^\circ 07.7'$
$hGY_{(20.00)} = 359^\circ 02.1'$	$e.i = -0.4$
corrección = $0^\circ 54.2'$	$a_o = 47^\circ 07.3'$
$hGY = 344^\circ 53.3'$	$c/D = -6.6$
$Le = 019^\circ 00.0' W$	$a_a = 47^\circ 00.7'$
$hLY = 325^\circ 53.3'$	$C/R = -0.9$
$AS^* = 080^\circ 37.3'$	$a_v = 47^\circ 59.8'$
$hL^* = 046^\circ 30.50'$	
$P^* = 46^\circ 30.50' W$	<b><math>\Delta a = +30.3'</math></b>
$\delta = +38^\circ 48.4'$	<b><math>Zv = 304.8^\circ</math></b>
$a_e = 44^\circ 52.87'$	
$Zv = N55.20W = 304.8^\circ$	

#### Fomalhaut

$hGY_{(19.00)} = 343^\circ 59.6'$	$a_i = 36^\circ 27.6'$
$hGY_{(20.00)} = 359^\circ 02.1'$	$e.i = -0.4$
corrección = $2^\circ 07.1'$	$a_o = 36^\circ 27.2'$
$hGY = 346^\circ 06.7'$	$c/D = -6.6$
$Le = 019^\circ 00.0' W$	$a_a = 36^\circ 20.6'$
$hLY = 327^\circ 06.7'$	$C/R = -1.3$
$AS^* = 015^\circ 20.6'$	$a_v = 36^\circ 19.3'$
$hL^* = 342^\circ 27.3'$	
$P^* = 17^\circ 32.7' E$	<b><math>\Delta a = -23.8'</math></b>
$\delta = -29^\circ 31.8'$	<b><math>Zv = 160.9^\circ</math></b>
$a_e = 36^\circ 43.1'$	
$Zv = S19.1E = 160.9^\circ$	

## Hamal

$hGY_{(19.00)} = 343^{\circ} 59.6'$	
$hGY_{(20.00)} = 359^{\circ} 02.1'$	$a_i = 31^{\circ} 54.7'$
corrección = $4^{\circ} 05.9'$	$e.i = -0.4$
$hGY = 348^{\circ} 05.5'$	$a_o = 31^{\circ} 54.3'$
$Le = 019^{\circ} 00.0' W$	$c/D = -6.6$
$hLY = 329^{\circ} 05.5'$	$a_a = 31^{\circ} 47.7'$
$AS^* = 327^{\circ} 57.1'$	$C/R = -1.3$
$hL^* = 297^{\circ} 02.6'$	$a_v = 31^{\circ} 46.4'$
$P^* = 62^{\circ} 57.4' E$	
$\delta = +23^{\circ} 32.8'$	<b><math>\Delta a = -23.2'</math></b>
$a_e = 32^{\circ} 09.6'$	<b><math>Zv = 074.7^{\circ}</math></b>
$Zv = N74.7E = 163.6^{\circ}$	

Como podemos observar en la *figura 32* en este caso se opta por usar el método de las bisectrices de altura.

Por tanto, el resultado final queda:

$\varphi_e = 21^{\circ} 00.00' N$	$L_e = 019^{\circ} 00.00' W$
$\Delta\varphi = 15.25' N$	$\Delta L = 29.25 W$
-----	-----
$\varphi_o = 21^{\circ} 15.25' N$	$L_e = 019^{\circ} 29.25 W$

Siendo la posición real del barco ya conocida gracias al GPS del barco  $\varphi = 21^{\circ} 14.990' N$   $L = 019^{\circ} 27.475' W$  podemos comparar los resultados y nos dan un error de 1.68 millas.

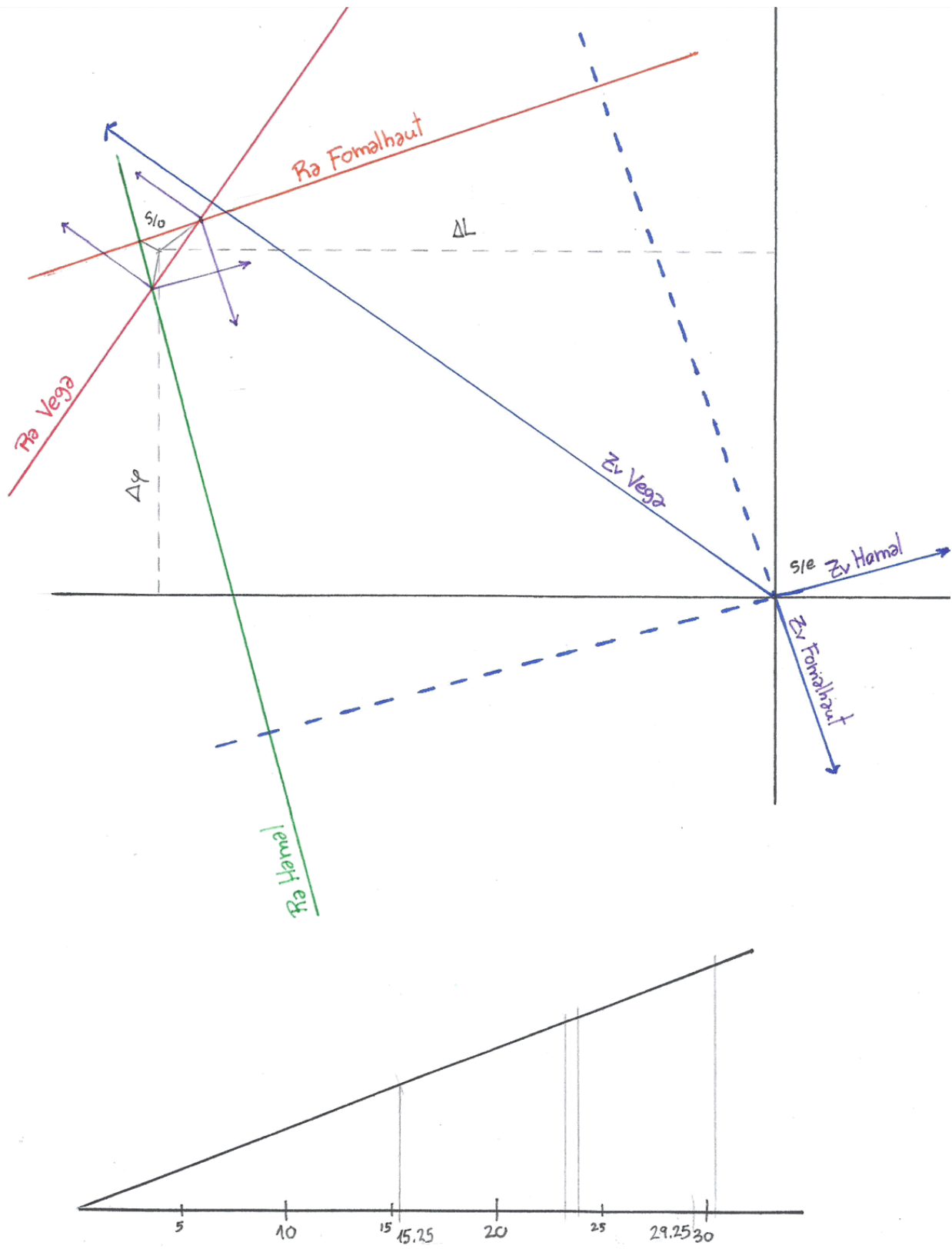


Figura 32. Resolució gràfica del exercici 4 per el mètode tradicional Saint Hilaire (propia)

## 5.6 EJERCICIO 5

A 08/11/2017 19:06:41 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^\circ 30' N$   $L = 019^\circ 00' W$  tomamos  $a_i$  de Vega  $54^\circ 31.2'$  y  $Zv = 305^\circ$ . Seguimos navegando con  $Rv = 147.7^\circ$  y a 7.9 nudos hasta las 19:10:07 UTC donde tomamos  $a_i$  de Altair  $68^\circ 29.8'$  y  $Zv = 265^\circ$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:15:22 tomamos  $a_i$  de Diphda  $24^\circ 49.5'$  y  $Zv = 110^\circ$ .

### Vega

$hGY_{(19.00)} = 333^\circ 09.1'$	$a_i = 54^\circ 31.2'$
$hGY_{(20.00)} = 348^\circ 11.6'$	$e.i = -0.4$
corrección = $1^\circ 40.5'$	$a_o = 54^\circ 30.8'$
$hGY = 334^\circ 49.6'$	$c/D = -6.6$
$Le = 019^\circ 00.0' W$	$a_a = 54^\circ 24.2'$
$hLY = 315^\circ 49.6'$	$C/R = -0.7$
$AS^* = 080^\circ 37.3'$	$a_v = 54^\circ 23.5'$
$hL^* = 036^\circ 26.9'$	
$P^* = 36^\circ 26.9' W$	<b><math>\Delta a = +0.67'</math></b>
$\delta = +38^\circ 48.4'$	<b><math>Zv = 307.5^\circ</math></b>
$a_e = 54^\circ 22.83'$	
$Zv = N58.45W = 307.5^\circ$	

$R = 147.7^\circ$	$\varphi_m = 21.49683$
$V = 7.9$ nudos	$A = 0.24$
$t = 3' 26''$	$\Delta L = 0.258' E$
$d = 0.4526$ millas	$\varphi_2 = 21^\circ 29.62' N$
$\Delta\varphi = 0.38'S$	$L_2 = 018^\circ 59.75' W$

### Altair

$hGY_{(19.00)} = 333^\circ 09.1'$	$a_i = 68^\circ 29.8'$
$hGY_{(20.00)} = 348^\circ 11.6'$	$e.i = -0.4$
corrección = $2^\circ 32.15'$	$a_o = 68^\circ 29.4'$
$hGY = 335^\circ 41.3'$	$c/D = -6.6$
$Le = 018^\circ 59.752' W$	$a_a = 68^\circ 22.8'$
$hLY = 316^\circ 41.5'$	$C/R = -0.5$
$AS^* = 062^\circ 05.5'$	$a_v = 68^\circ 22.3'$
$hL^* = 018^\circ 47.0'$	
$P^* = 18^\circ 47.0' W$	<b><math>\Delta a = +23.4'</math></b>
$\delta = 08^\circ 55.2'$	<b><math>Zv = 238^\circ</math></b>
$a_e = 67^\circ 58.9'$	
$Zv = S58W = 238^\circ$	

$R = 147.7^\circ$	$\varphi_m = 21.4888$
$V = 7.9$ nudos	$A = 0.3126$
$t = 5' 15''$	$\Delta L = 336' E$
$d = 0.692$ millas	$\varphi_2 = 21^\circ 29.035' N$
$\Delta\varphi = 0.585' N$	$L_2 = 018^\circ 59.414' W$

### Diphda

$hGY_{(19.00)} = 333^\circ 09.1'$	
$hGY_{(20.00)} = 348^\circ 11.6'$	$a_i = 24^\circ 49.5$
corrección = $3^\circ 51.15'$	$e.i = -0.4$
$hGY = 337^\circ 00.3'$	$a_o = 24^\circ 49.1'$
$Le = 018^\circ 59.414' W$	$c/D = -6.6$
$hLY = 318^\circ 00.83'$	$a_a = 24^\circ 42.5'$
$AS^* = 348^\circ 52.7'$	$C/R = -2.2$
$hL^* = 306^\circ 53.5'$	$a_v = 24^\circ 40.3'$
$P^* = 53^\circ 06.5' E$	
$\delta = -17^\circ 53.4'$	<b><math>\Delta a = -6.3'</math></b>
$a_e = 24^\circ 46.6'$	<b><math>Zv = 123^\circ</math></b>
$Zv = S57E = 123^\circ$	

Como podemos observar en la *figura 33* en este caso se opta por usar el método de las bisectrices de altura

Por tanto, el resultado final queda:

$\varphi_e = 21^\circ 30' N$	$L_e = 019^\circ 00' W$
$\varphi = 19.1' S$	$\Delta L = 18.4 W$
-----	-----
$\varphi_o = 21^\circ 10.9' N$	$L_e = 019^\circ 18.4 W$

Siendo la posición real del barco ya conocida gracias al GPS del barco  $\varphi = 21^\circ 09.988' N$   $L = 019^\circ 19.198' W$  podemos comparar los resultados y nos dan un error de 1.18 millas.

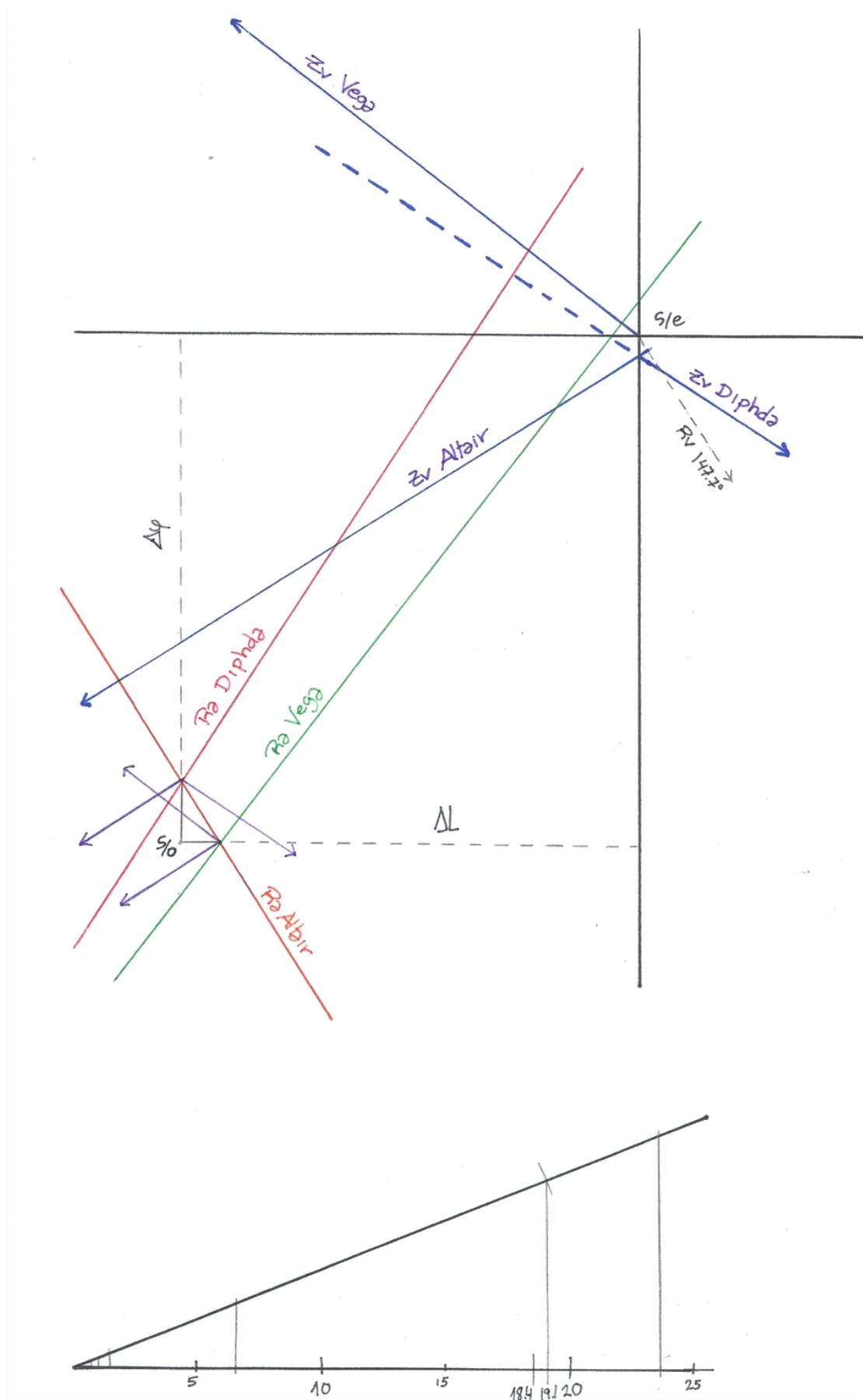


Figura 33. Resolución gráfica del ejercicio 5 por el método tradicional Saint Hilaire (propia)

## Capítulo 6. Método por rectas diferenciométricas tangentes

Este método fue inventado por D. Antonio Pita Porta, un Capitán de la Marina Mercante y profesor de la Escuela Superior de Marina Civil de A Coruña y está expuesto en su tesis doctoral. Sus fundamentos teóricos son bastante complejos por lo que en este trabajo no se profundizará mucho en ellos, no obstante se verán sus características principales y la metodología de resolución de los ejercicios por lo interesantes que resultan los resultados.

El propósito del método es reducir los errores a su mínima expresión para obtener una precisión en la situación final lo mejor posible. Como ya se ha expuesto anteriormente, existen 2 tipos de errores, los sistemáticos y los accidentales. Se usan dos técnicas para la reducción o eliminación de cada uno de ellos.

Se ha visto en el capítulo 4 que un buen método para la eliminación del error sistemático es la utilización de las bisectrices de altura. Este método va un poco más allá y asegura que esta bisectriz de altura tiene la forma geométrica de una hipérbole esférica. En la tesis se hace la siguiente analogía: “La bisectriz de altura es a la hipérbole esférica lo que la recta de altura es a la circunferencia de alturas iguales”. Por tanto, con una serie de cálculos se convierte esta recta obtenida de la bisectriz de altura en un fragmento de hipérbole esférica, lo que da más precisión al resultado, eliminando el error sistemático.

No obstante, como vimos también en el capítulo 4, la bisectriz de altura tiene la peculiaridad de contener nuestra situación solamente en los casos en los que todo o la mayor parte del error es sistemático. Por tanto, este método no sería válido en todos los casos. Por ello es necesaria otra herramienta para eliminar o minimizar el error accidental. Vimos que este error es más frecuente cuando las mediciones de los astros no son simultáneas y, suponiendo que se ha sido muy cuidadoso en el uso del sextante (ya que es otra fuente de errores accidentales) la mayor parte del error, sino todo, vendrá del traslado de las rectas de altura al mismo instante de tiempo. Para ello se utiliza la corrección a la altura del astro conocida como reducción al último horizonte. Esta consiste, como su nombre indica, en aplicar una corrección que a efectos prácticos hace como si todas las mediciones se hubiesen tomado en el horizonte de la última, eliminando así la necesidad de hacer traslados y eliminando la principal fuente de errores accidentales.

En conclusión, este método utiliza un sistema mejorado de bisectrices de altura y solventa la problemática de que no se pueda usar si hay una componente importante de error accidental.

Veremos que su metodología de resolución es muy diferente al método tradicional. Se harán una serie de cálculos para la obtención de estas hipérbolas esféricas a las que denomina rectas diferenciométricas tangentes. Con el uso de estas se hará la resolución final del ejercicio de forma gráfica.

## 6.1 EJERCICIO EXPLICATIVO

A 17/11/2017 19:06:53 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^{\circ} 00' N$   $L = 019^{\circ} 00' W$  tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $35^{\circ} 36.5'$  y  $Zv = 164^{\circ}$ . Seguimos navegando con  $Rv = 240^{\circ}$  y a 8 nudos hasta las 19:13:59 UTC donde tomamos  $a_i$  de Caph  $44^{\circ} 19.7'$  y  $Zv = 040^{\circ}$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:16:12 tomamos  $a_i$  de Vega  $46^{\circ} 06.6'$  y  $Zv = 308^{\circ}$ .

Al ser el mismo ejercicio que en el método anterior, algunos de los cálculos, como la altura estimada, se obviarán y se expondrá directamente el resultado cogido de ahí.

El primer paso es reducir al último horizonte las alturas de los astros. En este caso, la última medida realizada fue la de Vega, por tanto, se debe reducir la altura de Fomalhaut y Caph al horizonte en que se tomó Vega. A la altura instrumental de los astros solamente les aplicaremos las correcciones por refracción y por último horizonte. Se obviarán las correcciones de error de índice y de depresión del horizonte ya que tienen en mismo valor en todos los caso en un mismo ejercicio y pasarán a formar parte del error sistemático, que se eliminara posteriormente. Para la reducción al último horizonte se utiliza la siguiente fórmula matemática donde  $Rv$  es el rumbo verdadero del buque:

$$(1) C_{uh} = dn * \cos(|Zv - Rv|)$$

El procedimiento es el siguiente:

### Fomalhaut

$t_t = 9' 19''$	Tiempo transcurrido ente la observación de Vega y Fomalhaut
$dn = 1.252'$	Producto del tiempo transcurrido por la velocidad del buque
$C_{uh} = +0.18506$	La corrección al último horizonte. Resultado de aplicar (1)
$a_i = 35^{\circ} 36.5'$	Altura de Fomalhaut tomada con el sextante
$C/r = -1.4$	Corrección por refracción que encontramos en el AN
$C_{uh} = +0.18506$	Corrección al último horizonte
$a_{vc} = 35^{\circ} 35.285'$	El valor de la altura verdadera corregida

Para a obtención de la altura de **Caph** se realiza el mismo procedimiento

$t_t = 2' 13''$	$a_i = 44^{\circ} 19.7'$
$dn = 0.28788'$	$C/r = -1.1$
$C_{uh} = -0.243$	$C_{uh} = -0.243$
	$a_{vc} = 44^{\circ} 18.357'$

En el caso de **Vega** se aplica solo corrección por refracción y queda:  $a_v = 46^{\circ} 05.6'$

El siguiente paso es obtener los datos necesarios para la representación gráfica. Se calculan de la siguiente fórmula:

$$\rho = \frac{Kv - Ke}{2 \sin(\Delta Zv/2)} \quad \text{dónde} \quad Kv = a_{v1} - a_{v2} \quad \text{y} \quad Ke = a_{e1} - a_{e2}$$

$$\sum \frac{Zv}{2}$$



A continuación llamaremos a Fomalhaut  $\rightarrow$  A, Caph  $\rightarrow$  B y Vega  $\rightarrow$  C y haremos la siguiente tabla:

<b>A <math>\rightarrow</math></b>	$a_{vc} = 35^{\circ} 35.285'$	$a_e = 35^{\circ} 57.2'$	$Zv = 158.5^{\circ}$
<b>B <math>\rightarrow</math></b>	$a_{vc} = 44^{\circ} 18.357'$	$a_e = 43^{\circ} 56.4'$	$Zv = 024.7^{\circ}$
<b>C <math>\rightarrow</math></b>	$a_{vc} = 46^{\circ} 05.6'$	$a_e = 45^{\circ} 35.05'$	$Zv = 304.6^{\circ}$

El siguiente paso es combinar los astros 2 a 2, cada uno con los otros 2 restantes, y hacer la siguiente tabla usando las formulas mencionadas anteriormente:

<b>A-B</b>	<b>A-C</b>	<b>B-C</b>
$Kv = 8^{\circ} 43.1'$	$Kv = 10^{\circ} 30.3'$	$Kv = 1^{\circ} 47.3'$
$Ke = 7^{\circ} 59.2'$	$Ke = 9^{\circ} 37.8'$	$Ke = 1^{\circ} 38.7'$
$Kv - Ke = 43.85'$	$Kv - Ke = 52.46'$	$Kv - Ke = 8.6'$
$\Delta Z/2 = 066.9^{\circ}$	$\Delta Z/2 = 073.05^{\circ}$	$\Delta Z/2 = 139.95^{\circ}$
$\rho = +23.84$	$\rho = +27.42$	$\rho = +6.68$
$\Sigma Zv/2 = 091.6^{\circ}$	$\Sigma Zv/2 = 231.55^{\circ}$	$\Sigma Zv/2 = 164.65^{\circ}$

Con estos datos ya podemos proceder a su resolución gráfica, como se puede ver en la *figura 34*. En primer lugar dibujamos los ejes longitudinales y verticales. En el eje horizontal nos construiremos la escala que usaremos para la representación (1). En ella cogeremos como valor máximo uno ligeramente superior a nuestro mayor valor de  $\rho$  en valor absoluto. A continuación trazaremos una circunferencia con el centro en el cero del eje de coordenadas y con radio el valor de  $\rho$  de cada astro. Así, obtenemos las circunferencias de los astros (2) A-B (Fomalhaut-Caph), (3) A-C (Fomalhaut-Vega) y (4) B-C (Caph-Vega).

El siguiente paso es trazar una recta con origen en el centro (s/e) y final en la circunferencia referente a cada par de astros. Su ángulo respecto al eje vertical superior será el valor de  $\Sigma Zv/2$  de cada par de astros. Así pues dibujamos las rectas de A-B (5), A-C (6) y B-C (7).

El último paso es trasladar estas rectas trazadas y hacerlas tangentes a la circunferencia correspondiente a su par de astros. Podemos observar que hay 2 rectas tangentes posibles a trazar para cada uno. Se deberá trazar en la dirección del azimut del astro cuyo valor de la altura verdadera sea mayor, si  $\rho$  es positivo, y en la dirección del azimut del astro cuya altura verdadera sea menor, si  $\rho$  es negativo. Por ejemplo, en el caso de los astro A-C (Fomalhaut y Vega), el valor de  $\rho$  es positivo. Por tanto, será en la dirección del azimut del astro con mayor valor de su altura verdadera. Fomalhaut tiene  $a_v = 35^{\circ} 35.285'$  y Vega  $a_v = 46^{\circ} 05.6'$ . Por tanto será en la dirección del azimut de Vega ( $304.6^{\circ}$ ). Entonces, se trazará por la parte superior de la circunferencia y tangente a la misma. De haber sido el valor de la altura verdadera de Vega, por ejemplo,  $25^{\circ}$ , se trazaría por la parte inferior de la circunferencia.

Entonces tenemos las rectas diferenciométricas tangentes de A-B (8), A-C (9), B-C (10). Estas tienen un punto de intersección (11), que es nuestra situación observada. Ahora solo falta medir la distancia de este punto a los ejes sobre la escala que hemos fabricado anteriormente.

Obtenemos (12)  $\Delta\phi = 24.1'N$  y (13)  $\Delta L = 13.7' W$

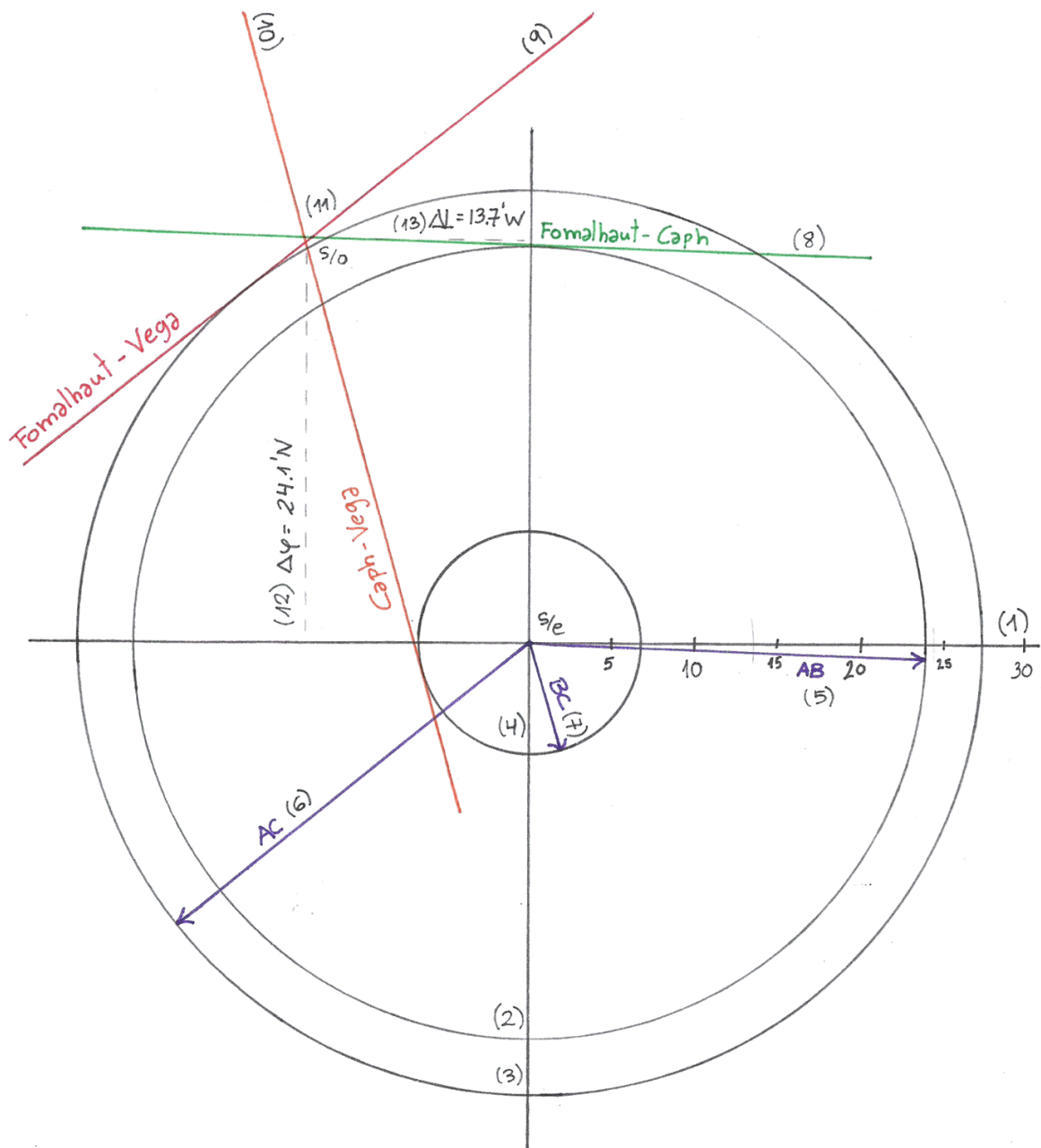


Figura 34. Resolución gráfica del ejercicio por rectas diferenciométricas (propia)

Por tanto, el resultado final queda:

$$\varphi_e = 21^{\circ} 00' N$$

$$L_e = 019^{\circ} 00' W$$

Siendo la posición real del barco ya conocida

$$\Delta\varphi = 24.1' N$$

$$\Delta L = 13.7' W$$

gracias al GPS del barco  $\varphi = 21^{\circ} 22.654' N$

-----

-----

$L = 019^{\circ} 14.196' W$  podemos comparar los

$$\varphi_0 = 21^{\circ} 24.1' N$$

$$L_e = 019^{\circ} 13.7' W$$

resultados y nos dan un error de 1.52 millas.

## 6.2 EJERCICIO 1

A 21/11/2017 19:04:04 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^{\circ} 00' N$   $L = 019^{\circ} 00' W$  tomamos  $a_i$  de Vega  $45^{\circ} 30.5'$  y  $Z_v = 310^{\circ}$ . Seguimos navegando con  $R_v = 058.8^{\circ}$  y a 8 nudos hasta las 19:07:59 UTC donde tomamos  $a_i$  de Altair  $57^{\circ} 59.2'$  y  $Z_v = 250^{\circ}$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:11:03 tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $36^{\circ} 59.2'$  y  $Z_v = 168^{\circ}$ .

### Vega

$$l_t = 6' 59''$$

$$dn = 0.934'$$

$$C_{uh} = -0.384$$

$$a_i = 45^{\circ} 30.5'$$

$$C/r = -1.0$$

$$C_{uh} = -0.384$$

$$\underline{a_{vc} = 45^{\circ} 28.566'}$$

### Altair

$$l_t = 3' 04''$$

$$dn = 0.41015'$$

$$C_{uh} = -0.398$$

$$a_i = 57^{\circ} 59.2'$$

$$C/r = -0.7$$

$$C_{uh} = -0.398$$

$$\underline{a_{vc} = 57^{\circ} 58.102'}$$

**Fomalhaut** con la corrección por refracción  
queda:  $\underline{a_v = 36^{\circ} 57.9'}$

A continuación llamaremos a Vega  $\rightarrow A$ , Altair  $\rightarrow B$  y Fomalhaut  $\rightarrow C$  y haremos la siguiente tabla:

<b>A</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 45^{\circ} 28.566'$	$a_e = 44^{\circ} 52.87'$	$Z_v = 304.5^{\circ}$
<b>B</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 57^{\circ} 58.102'$	$a_e = 57^{\circ} 44.15'$	$Z_v = 252.7^{\circ}$
<b>C</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 36^{\circ} 57.90'$	$a_e = 37^{\circ} 27.50'$	$Z_v = 163.6^{\circ}$

### A-B

$$K_v = 12^{\circ} 29.5'$$

$$K_e = 12^{\circ} 51.3'$$

$$K_v - K_e = -21.75'$$

$$\Delta Z/2 = 025.9^{\circ}$$

$$\rho = -24.9$$

$$\Sigma Z_v/2 = 278.6^{\circ}$$

### A-C

$$K_v = 8^{\circ} 30.7'$$

$$K_e = 7^{\circ} 25.4'$$

$$K_v - K_e = 1^{\circ} 05.3'$$

$$\Delta Z/2 = 070.45^{\circ}$$

$$\rho = +34.6$$

$$\Sigma Z_v/2 = 234^{\circ}$$

### B-C

$$K_v = 21^{\circ} 00.2'$$

$$K_e = 20^{\circ} 16.65'$$

$$K_v - K_e = 43.5'$$

$$\Delta Z/2 = 044.55^{\circ}$$

$$\rho = +31.0$$

$$\Sigma Z_v/2 = 208.2^{\circ}$$

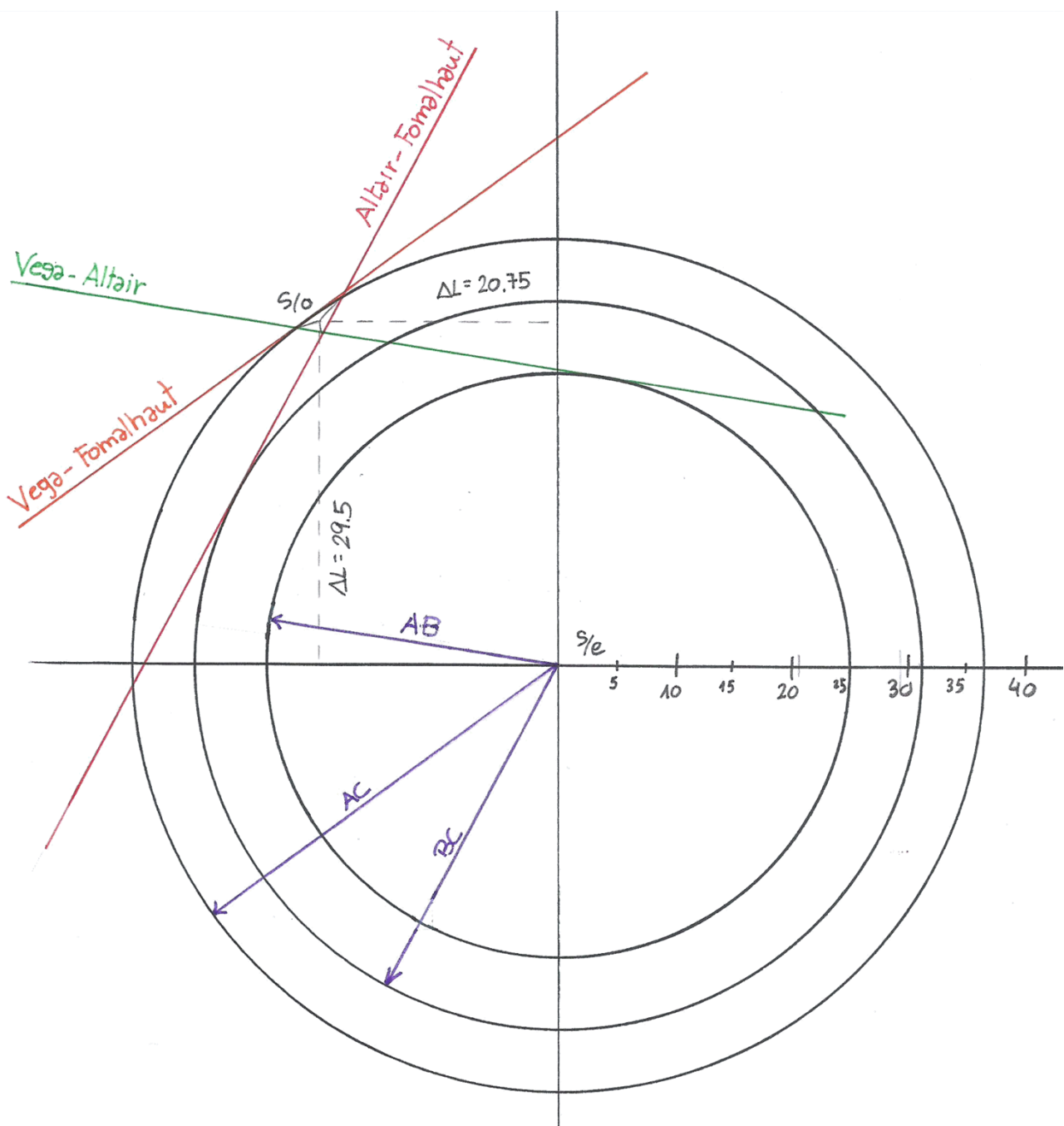


Figura 35. Resolución gráfica del ejercicio 1 por rectas diferenciométricas (propia)

Por tanto, el resultado final queda:

$\varphi_e = 21^\circ 00' N$	$L_e = 019^\circ 00' W$
$\Delta\varphi = 29.5' N$	$\Delta L = 20.75 W$
-----	-----
$\varphi_o = 21^\circ 29.5' N$	$L_e = 019^\circ 20.75 W$

Siendo la posición real del barco ya conocida gracias al GPS del barco  $\varphi = 21^\circ 30.945' N$   $L = 019^\circ 20.064' W$  podemos comparar los resultados y nos dan un error de 1.58 millas.

### 6.3 EJERCICIO 2

A 20/11/2017 18:58:03 UTC en situación estimada  $\varphi = 22^{\circ} 00' N$   $L = 019^{\circ} 30' W$  tomamos  $a_i$  de la Luna  $16^{\circ} 06.6'$  y  $Z_v = 238^{\circ}$ . Seguimos navegando con  $R_v = 054.9^{\circ}$  y a 4.4 nudos hasta las 19:09:30 UTC donde tomamos  $a_i$  de Deneb  $62^{\circ} 07.6'$  y  $Z_v = 320^{\circ}$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:14:16 tomamos  $a_i$  de Hamal  $32^{\circ} 48.6'$  y  $Z_v = 075^{\circ}$ .

#### Luna

$$l_t = 16' 13''$$

$$dn = 1.180'$$

$$C_{uh} = -1.175$$

$$a_i = 16^{\circ} 06.6'$$

$$C/R.P.SD = +63.4$$

$$C_{uh} = -1.175$$

$$\underline{a_{vc} = 17^{\circ} 08.825'}$$

#### Deneb

$$l_t = 4' 46''$$

$$dn = 0.347'$$

$$C_{uh} = -0.05$$

$$a_i = 62^{\circ} 07.6'$$

$$C/r = -0.5$$

$$C_{uh} = -0.05$$

$$\underline{a_{vc} = 62^{\circ} 07.15'}$$

**Hamal** con la corrección por refracción queda:

$$\underline{a_v = 32^{\circ} 47.0'}$$

A continuación llamaremos a Luna  $\rightarrow A$ , Deneb  $\rightarrow B$  y Hamal  $\rightarrow C$  y haremos la siguiente tabla:

<b>A</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 17^{\circ} 08.825'$	$a_e = 17^{\circ} 12.68'$	$Z_v = 240.2^{\circ}$
<b>B</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 62^{\circ} 07.15'$	$a_e = 62^{\circ} 40.8'$	$Z_v = 332.8^{\circ}$
<b>C</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 32^{\circ} 47.0'$	$a_e = 32^{\circ} 24.37'$	$Z_v = 075.3^{\circ}$

#### A-B

$$K_v = 44^{\circ} 58.325'$$

$$K_e = 45^{\circ} 28.1'$$

$$K_v - K_e = -29.8'$$

$$\Delta Z/2 = 046.3^{\circ}$$

$$\rho = -20.6$$

$$\Sigma Z_v/2 = 286.5^{\circ}$$

#### A-C

$$K_v = 15^{\circ} 38.15'$$

$$K_e = 15^{\circ} 11.7'$$

$$K_v - K_e = 26.5'$$

$$\Delta Z/2 = 082.45^{\circ}$$

$$\rho = +13.35$$

$$\Sigma Z_v/2 = 157.8^{\circ}$$

#### B-C

$$K_v = 29^{\circ} 20.15'$$

$$K_e = 30^{\circ} 16.4'$$

$$K_v - K_e = -56.3'$$

$$\Delta Z/2 = 128.75^{\circ}$$

$$\rho = -36.1$$

$$\Sigma Z_v/2 = 204^{\circ}$$

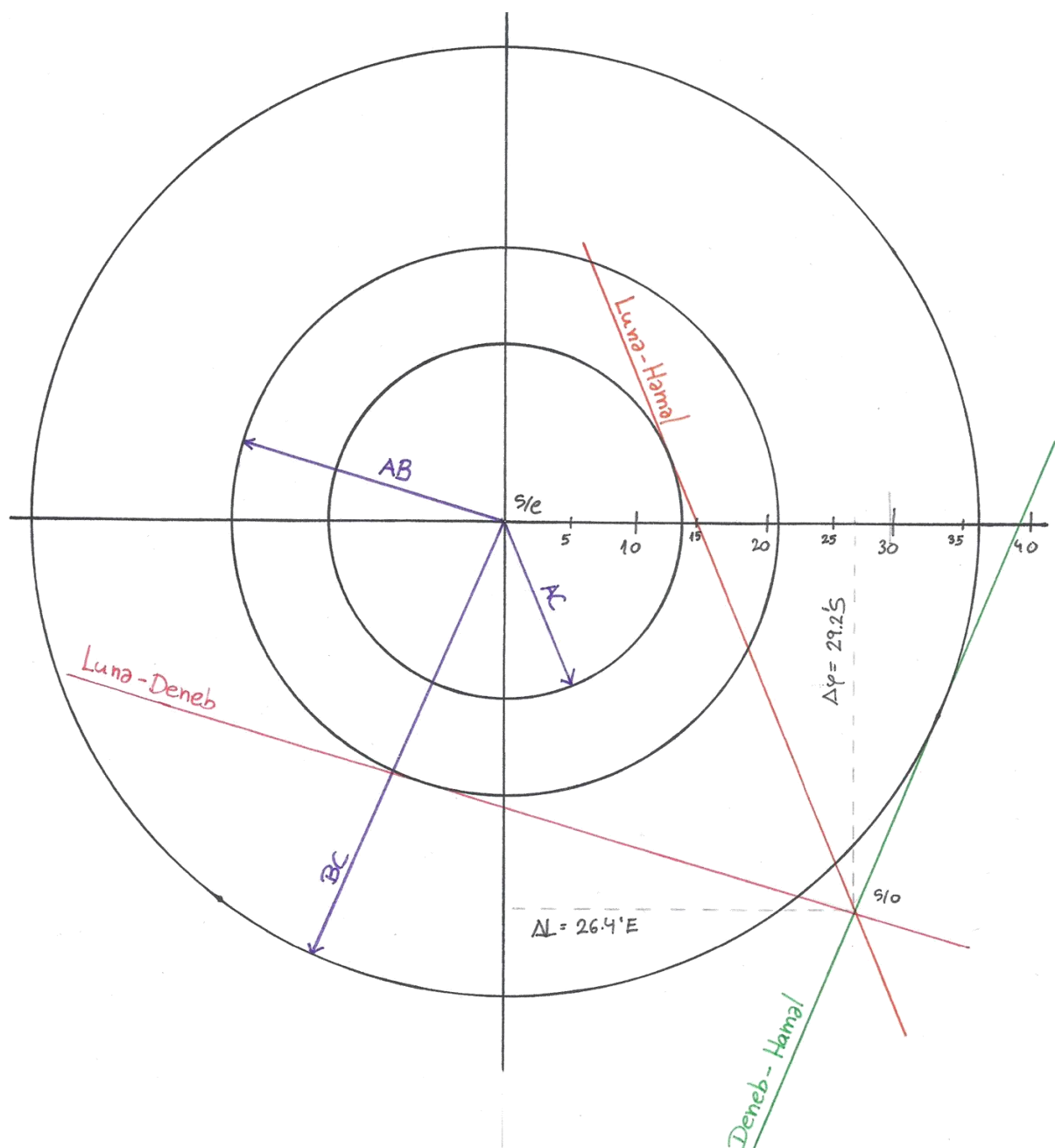


Figura 36. Resolución gráfica del ejercicio 2 por rectas diferenciométricas (propia)

Por tanto, el resultado final queda:

$\varphi_e = 22^{\circ} 00' N$	$L_e = 019^{\circ} 30' W$
$\Delta\varphi = 29.2' S$	$\Delta L = 26.4 E$
-----	-----
$\varphi_o = 21^{\circ} 30.8' N$	$L_e = 019^{\circ} 03.6 W$

Siendo la posición real del barco ya conocida gracias al GPS del barco  $\varphi = 21^{\circ} 31.140' N$   $L = 018^{\circ} 59.343' W$  podemos comparar los resultados y nos dan un error de 3.99 millas.

### 6.4 EJERCICIO 3

A 07/11/2017 19:07:16 UTC en situación estimada  $\varphi = 22^{\circ} 00' N$   $L = 020^{\circ} 00' W$  tomamos  $a_i$  de Deneb  $66^{\circ} 02.7'$  y  $Z_v = 357^{\circ}$ . Seguimos navegando con  $R_v = 327^{\circ}$  y a 8 nudos hasta las 19:09:54 UTC donde tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $31^{\circ} 43.6'$  y  $Z_v = 147^{\circ}$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:22:41 tomamos  $a_i$  de Altair  $66^{\circ} 32.6'$  y  $Z_v = 230^{\circ}$ .

#### Deneb

$$l_t = 15' 25''$$

$$dn = 2.06198'$$

$$C_{uh} = +1.8372$$

$$a_i = 66^{\circ} 02.7'$$

$$C/r = -0.5$$

$$C_{uh} = +1.8372$$

$$\underline{a_{vc} = 66^{\circ} 04.05'}$$

#### Fomalhaut

$$l_t = 12' 47''$$

$$dn = 1.7097'$$

$$C_{uh} = -1.7097$$

$$a_i = 31^{\circ} 43.6'$$

$$C/r = -1.7$$

$$C_{uh} = -1.7097$$

$$\underline{a_{vc} = 31^{\circ} 40.19'}$$

**Altair** con la corrección por refracción queda:

$$\underline{a_v = 66^{\circ} 32.1'}$$

A continuación llamaremos a Deneb  $\rightarrow A$ , Fomalhaut  $\rightarrow B$  y Altair  $\rightarrow C$  y haremos la siguiente tabla:

<b>A</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 66^{\circ} 04.05'$	$a_e = 66^{\circ} 28.60'$	$Z_v = 354.0^{\circ}$
<b>B</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 31^{\circ} 40.19'$	$a_e = 30^{\circ} 55.30'$	$Z_v = 149.5^{\circ}$
<b>C</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 66^{\circ} 32.10'$	$a_e = 66^{\circ} 47.80'$	$Z_v = 240.0^{\circ}$

#### A-B

$$K_v = 34^{\circ} 23.85'$$

$$K_e = 35^{\circ} 33.3'$$

$$K_v - K_e = -1^{\circ} 09.4'$$

$$\Delta Z/2 = 102.5^{\circ}$$

$$\rho = -35.56$$

$$\Sigma Z_v/2 = 251.75^{\circ}$$

#### A-C

$$K_v = 0^{\circ} 28.05'$$

$$K_e = 0^{\circ} 19.2'$$

$$K_v - K_e = 8.85'$$

$$\Delta Z/2 = 057^{\circ}$$

$$\rho = +5.28$$

$$\Sigma Z_v/2 = 297^{\circ}$$

#### B-C

$$K_v = 34^{\circ} 51.9'$$

$$K_e = 35^{\circ} 52.5'$$

$$K_v - K_e = -1^{\circ} 00.6'$$

$$\Delta Z/2 = 045.25^{\circ}$$

$$\rho = -42.66$$

$$\Sigma Z_v/2 = 194.75^{\circ}$$

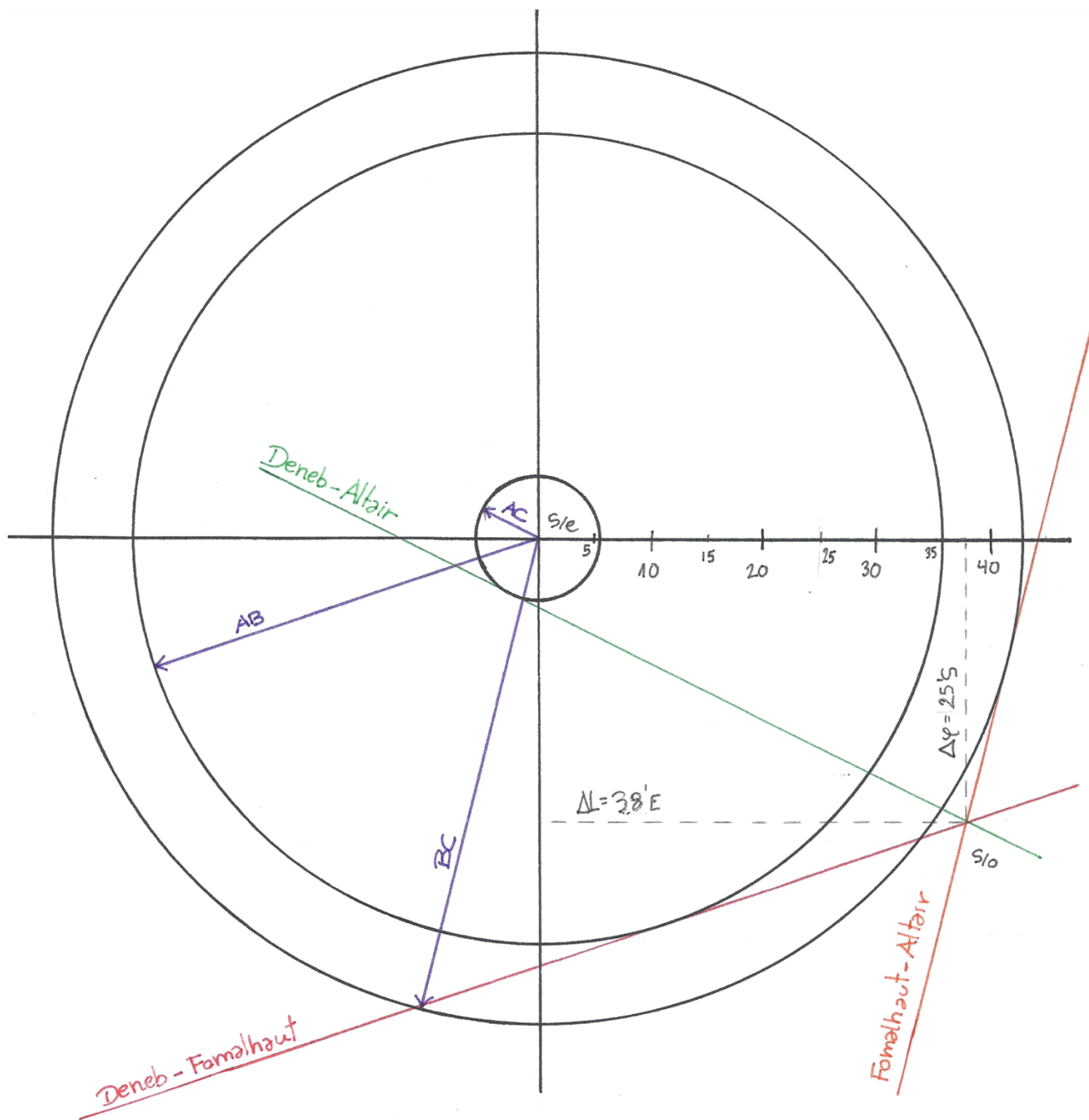


Figura 37. Resolución gráfica del ejercicio 3 por rectas diferenciométricas (propia)

Por tanto, el resultado final queda:

$\varphi_e = 22^\circ 00' \text{ N}$	$L_e = 020^\circ 00' \text{ W}$
$\Delta\varphi = 25' \text{ S}$	$\Delta L = 38 \text{ E}$
-----	-----
$\varphi_o = 21^\circ 35.0' \text{ N}$	$L_e = 019^\circ 22.0 \text{ W}$

Siendo la posición real del barco ya conocida gracias al GPS del barco  $\varphi=21^\circ 34' \text{ N}$   $L= 019^\circ 21' \text{ W}$  podemos comparar los resultados y nos dan un error de 1.36 millas.



### 6.5 EJERCICIO 4

A 19/11/2017 y con el buque parado en DP a las 19:03:34 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^{\circ} 00' N$   $L = 019^{\circ} 00' W$  tomamos  $a_i$  de Vega  $47^{\circ} 07.7'$  y  $Z_v = 305^{\circ}$ . A las 19:08:27 UTC tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $36^{\circ} 27.6'$  y  $Z_v = 165^{\circ}$  y a las 19:16:21 tomamos  $a_i$  de Hamal  $31^{\circ} 54.7'$  y  $Z_v = 080^{\circ}$ .

No hay correcciones al último horizonte al estar el buque parado. A la altura instrumental solo se le aplica la corrección por refracción.

$$\text{Vega } A_{vc} = 47^{\circ} 06.8'$$

$$\text{Fomalhaut } A_{vc} = 36^{\circ} 26.3'$$

$$\text{Hamal } A_{vc} = 31^{\circ} 53.0'$$

A continuación llamaremos a Vega  $\rightarrow A$ , Fomalhaut  $\rightarrow B$  y Hamal  $\rightarrow C$  y haremos la siguiente tabla:

<b>A</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 47^{\circ} 06.80'$	$a_e = 46^{\circ} 29.50'$	$Z_v = 304.8^{\circ}$
<b>B</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 36^{\circ} 26.30'$	$a_e = 36^{\circ} 43.10'$	$Z_v = 160.9^{\circ}$
<b>C</b> $\rightarrow$	$a_{vc} = 31^{\circ} 53.00'$	$a_e = 32^{\circ} 09.60'$	$Z_v = 074.7^{\circ}$

#### A-B

$$K_v = 10^{\circ} 40.5'$$

$$K_e = 9^{\circ} 46.4'$$

$$K_v - K_e = 54.1'$$

$$\Delta Z/2 = 071.95^{\circ}$$

$$\rho = +28.45$$

$$\Sigma Z_v/2 = 232.8^{\circ}$$

#### A-C

$$K_v = 15^{\circ} 13.8'$$

$$K_e = 14^{\circ} 19.9'$$

$$K_v - K_e = 53.9'$$

$$\Delta Z/2 = 115.05^{\circ}$$

$$\rho = +29.75$$

$$\Sigma Z_v/2 = 189.8^{\circ}$$

#### B-C

$$K_v = 4^{\circ} 33.3'$$

$$K_e = 4^{\circ} 33.5'$$

$$K_v - K_e = 0.2'$$

$$\Delta Z/2 = 043.1^{\circ}$$

$$\rho = -0.15$$

$$\Sigma Z_v/2 = 117.8^{\circ}$$

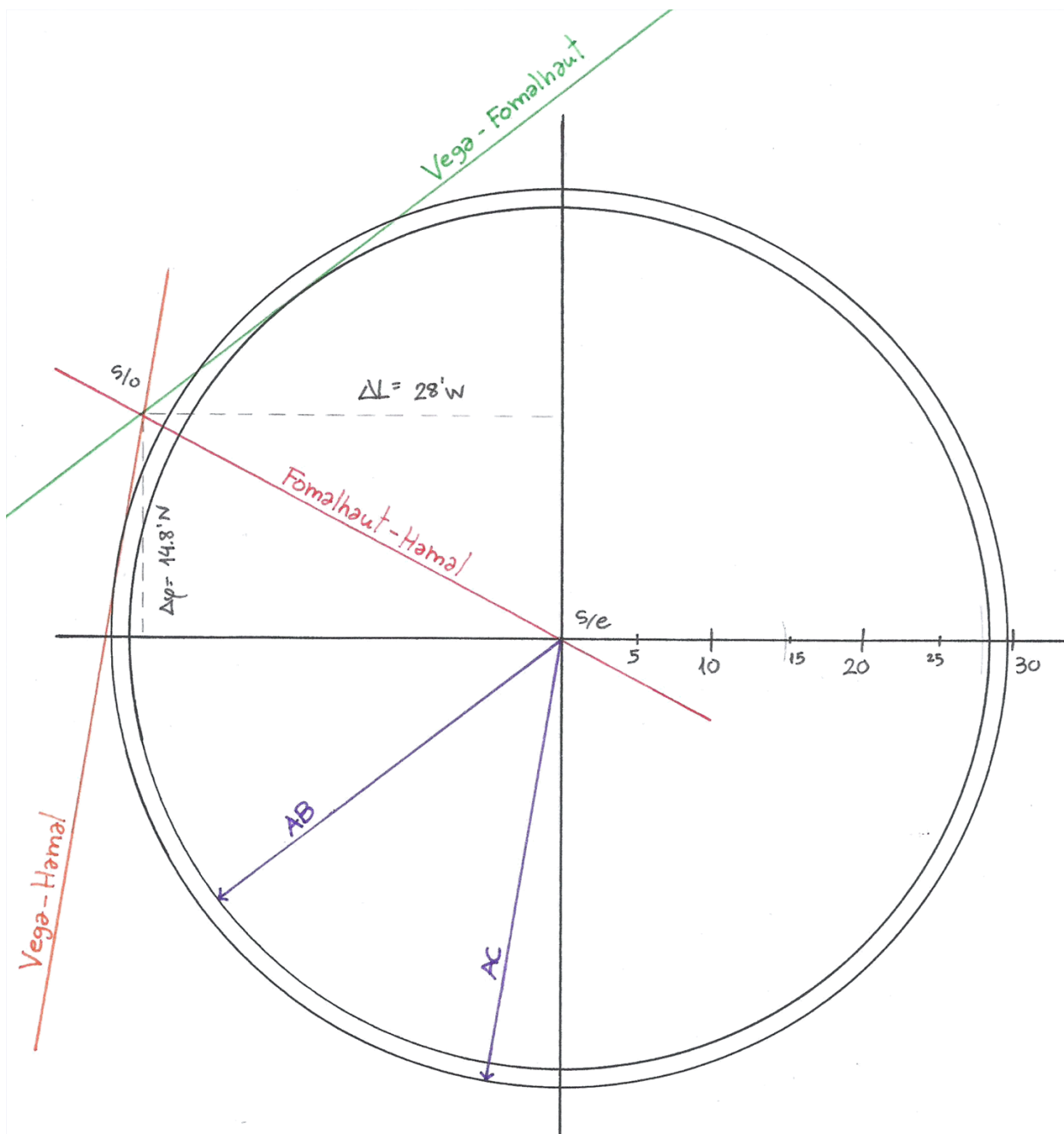


Figura 38. Resolución gráfica del ejercicio 4 por rectas diferenciométricas (propia)

Por tanto, el resultado final queda:

$$\varphi_e = 21^{\circ} 00' \text{ N}$$

$$L_e = 019^{\circ} 00' \text{ W}$$

$$\Delta\varphi = 14.8 \text{ N}$$

$$\Delta L = 28 \text{ W}$$

$$\varphi_o = 21^{\circ} 14.8' \text{ N}$$

$$L_e = 019^{\circ} 28.0 \text{ W}$$

Siendo la posición real del barco ya conocida gracias al GPS del barco  $\varphi = 21^{\circ} 14.990' \text{ N}$   $L = 019^{\circ} 27.475' \text{ W}$  podemos comparar los resultados y nos dan un error de 0.53 millas.

### 6.6 EJERCICIO 5

A 08/11/2017 19:06:41 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^{\circ} 30' N$   $L = 019^{\circ} 00' W$  tomamos  $a_i$  de Vega  $54^{\circ} 31.2'$  y  $Zv = 305^{\circ}$ . Seguimos navegando con  $Rv = 147.7^{\circ}$  y a 7.9 nudos hasta las 19:10:07 UTC donde tomamos  $a_i$  de Altair  $68^{\circ} 29.8'$  y  $Zv = 265^{\circ}$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:15:22 tomamos  $a_i$  de Diphda  $24^{\circ} 49.5'$  y  $Zv = 110^{\circ}$ .

#### Vega

$$l_t = 8' 41''$$

$$dn = 1.14475'$$

$$C_{uh} = -1.074$$

$$a_i = 54^{\circ} 31.2'$$

$$C/r = -0.7$$

$$C_{uh} = -1.074$$

$$\underline{a_{vc} = 54^{\circ} 29.426'}$$

#### Altair

$$l_t = 5' 15''$$

$$dn = 0.692125'$$

$$C_{uh} = -0.003$$

$$a_i = 68^{\circ} 29.8'$$

$$C/r = -0.5$$

$$C_{uh} = -0.003$$

$$\underline{a_{vc} = 68^{\circ} 29.3'}$$

Diphda con la corrección por refracción queda:

$$\underline{a_v = 24^{\circ} 47.3'}$$

A continuación llamaremos a Vega  $\rightarrow A$ , Altair  $\rightarrow B$  y Diphda  $\rightarrow C$  y haremos la siguiente tabla:

<b>A <math>\rightarrow</math></b>	$a_{vc} = 54^{\circ} 29.426'$	$a_e = 54^{\circ} 22.83'$	$Zv = 307.5^{\circ}$
<b>B <math>\rightarrow</math></b>	$a_{vc} = 68^{\circ} 29.30'$	$a_e = 67^{\circ} 58.90'$	$Zv = 238.0^{\circ}$
<b>C <math>\rightarrow</math></b>	$a_{vc} = 24^{\circ} 47.30'$	$a_e = 24^{\circ} 46.60'$	$Zv = 123.0^{\circ}$

#### A-B

$$Kv = 13^{\circ} 59.85'$$

$$Ke = 13^{\circ} 36.07'$$

$$Kv - Ke = -23.78'$$

$$\Delta Z/2 = 034.75^{\circ}$$

$$\rho = +20.88$$

$$\Sigma Zv/2 = 272.75^{\circ}$$

#### A-C

$$Kv = 29^{\circ} 47.1'$$

$$Ke = 29^{\circ} 36.2'$$

$$Kv - Ke = 5.9'$$

$$\Delta Z/2 = 092.25^{\circ}$$

$$\rho = +2.95$$

$$\Sigma Zv/2 = 215.25^{\circ}$$

#### B-C

$$Kv = 43^{\circ} 42.0'$$

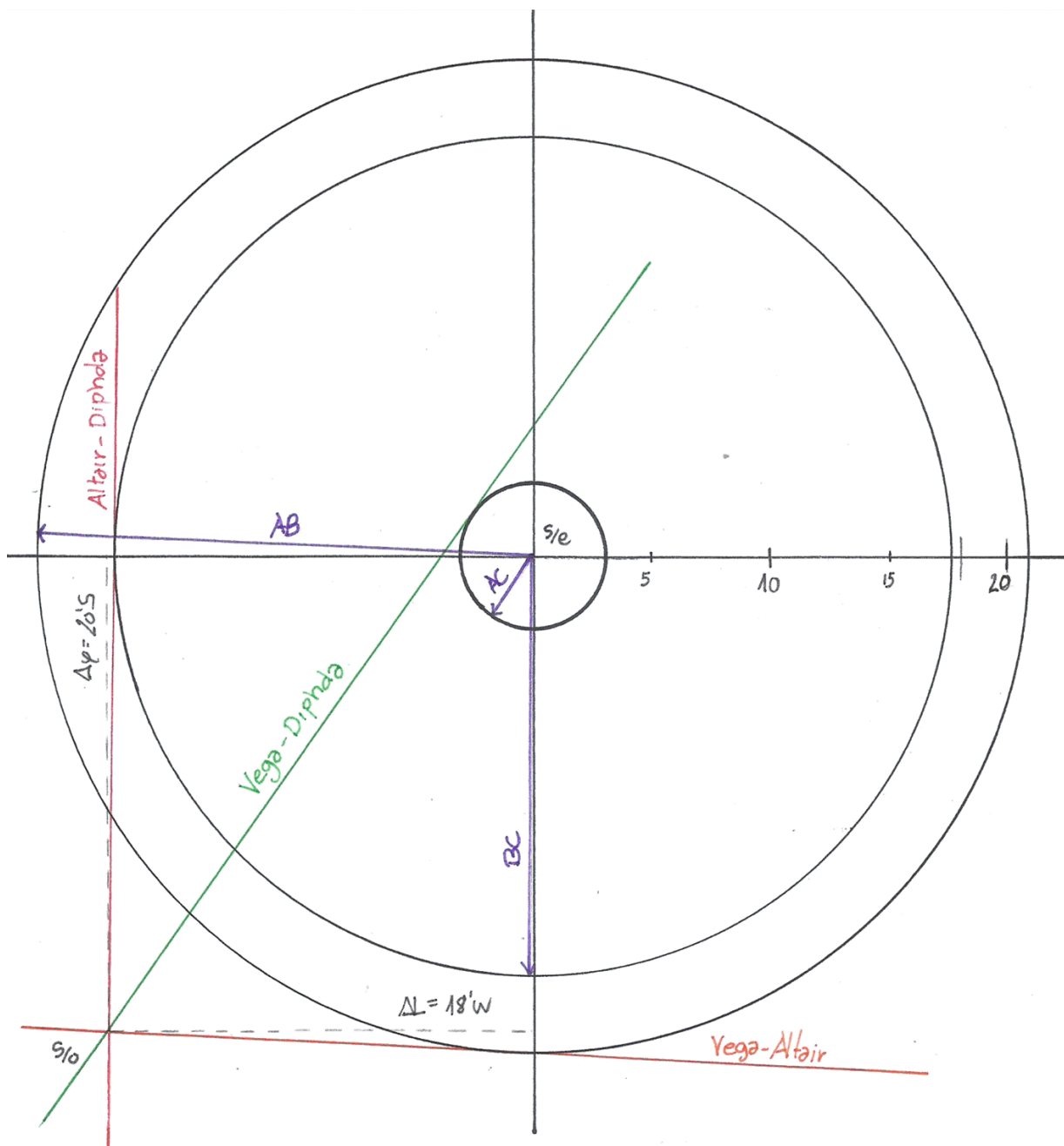
$$Ke = 43^{\circ} 12.3'$$

$$Kv - Ke = 29.7'$$

$$\Delta Z/2 = 057.5^{\circ}$$

$$\rho = +17.6$$

$$\Sigma Zv/2 = 180.5^{\circ}$$



**Figura 39. Resolución gráfica del ejercicio 5 por rectas diferenciométricas (propia)**

Por tanto, el resultado final queda:

$$\varphi_e = 21^{\circ} 30' \text{ N}$$

L<sub>e</sub>= 019° 00' W

$$\Delta\varphi = 20.0' \text{ S}$$

$$\Delta L = 18.0 \text{ W}$$

$$\varphi_o = 21^{\circ} 10.0' \text{ N}$$

$$L_e = 0.19^{+0.18.0}_{-0.00} \text{ W}$$

Siendo la posición real del barco ya conocida gracias al GPS del barco  $\varphi=21^{\circ} 09.988'N$   $L= 019^{\circ} 19.198'W$  podemos comparar los resultados y nos dan un error de 1.10 millas.

## Capítulo 7. Método de Doves

La característica principal de este método es que no requiere una situación de estima. Permite ubicarnos sin tener la más remota idea de donde nos encontramos. Este método se basa en situarnos directamente sobre el globo terráqueo en la intersección de dos circunferencias de alturas iguales. A partir de ahí, y con las coordenadas de los astros que nos proporciona el Almanaque Náutico, se construyen los triángulos de posición y su resolución nos dará nuestra latitud y longitud. Es en realidad el método más simple que se conoce incluso desde antes que el método de la recta de altura de Marq Saint Hilaire, pero su resolución no era factible por dos motivos:

- A día de hoy su resolución es simple gracias a las calculadoras modernas que todos podemos tener en la mesa de derrota. No obstante, debido a los sistemas de ecuaciones trigonométricas que se obtienen, sin el uso de estas era un trabajo pesado y muy tedioso, a diferencia del método tradicional donde era posible para realizar los cálculos el uso de tablas y esquemas de cálculos preestablecidos. Por tanto, si bien su resolución analítica siempre fue viable, no resultaba práctica debido a su dificultad, problema hoy en día solventado por las modernas y compactas calculadoras.
- Por otro lado, en este sistema, si bien se utilizan representaciones graficas a modo de ayuda para el cálculo analítico, su resolución gráfica no es viable. Esto es debido al gran tamaño de la circunferencia de alturas iguales. Para una precisión de 1 milla se necesitaría una esfera de casi 7m de diámetro. Esto se puede demostrar fácilmente: si una milla corresponde al arco de 1 minuto de grado, la circunferencia debería tener  $360 \cdot 60 = 21.600$  minutos. Con una precisión de 1 milla-1mm, tendríamos 21.600mm de circunferencia. Por tanto  $21.600/\pi = 6875$  mm...casi 7m. Es precisamente por ese motivo por lo que se inventó el concepto de recta de altura. Para poder dibujar un fragmento de esa circunferencia suficiente para tener precisión.

Para la resolución de las ecuaciones trigonométricas que se plantearán se utilizara el teorema del coseno en la trigonometría esférica:

$$\cos CB = \cos AC * \cos AB + \sin AC * \sin AB * \cos \alpha$$

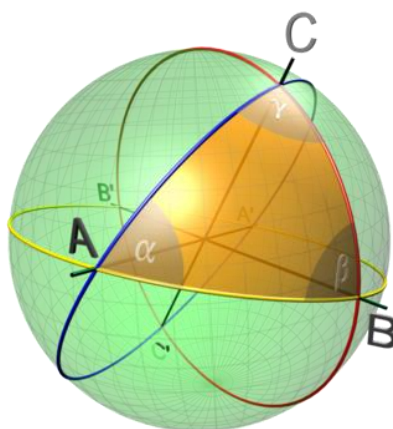


Figura 40. Teorema del coseno (wikipedia.es)

## 7.1 EJERCICIO EXPLICATIVO

A 17/11/2017 19:06:53 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^{\circ} 00' N$   $L = 019^{\circ} 00' W$  tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $35^{\circ} 36.5'$  y  $Zv = 164^{\circ}$ . Seguimos navegando con  $Rv = 240^{\circ}$  y a 8 nudos hasta las 19:13:59 UTC donde tomamos  $a_i$  de Caph  $44^{\circ} 19.7'$  y  $Zv = 040^{\circ}$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:16:12 tomamos  $a_i$  de Vega  $46^{\circ} 06.6'$  y  $Zv = 308^{\circ}$ .

Durante la realización del ejercicio se utiliza una representación gráfica de la situación para ayudar a la posterior resolución analítica. Se trata de un esquema y no pretende ser una resolución gráfica, es solo para facilitar su comprensión. No es de vital importancia respetar las medidas en el dibujo, pero si las proporciones entre ellas para que el resultado sea lo más real posible.

Aunque tenemos 3 astros en el enunciado, es suficiente con la utilización de dos de ellos. Lo más recomendable es usar aquellos en los que creemos que hemos tomado con mejor precisión las alturas, ya que como veremos la precisión en ello en este método es muy relevante. Los datos que necesitamos los tenemos calculados ya con los métodos anteriores, por lo que los cogeremos de allí. Son los siguientes:

### Fomalhaut

$\delta = -29^{\circ} 31.8'$

$a_{vc} = 35^{\circ} 28.28506' \quad (1)$

$hG^* = 359^{\circ} 05.45'$

### Vega

$\delta = 38^{\circ} 48.4'$

$a_{vc} = 45^{\circ} 58.6' \quad (2)$

$hG^* = 066^{\circ} 4.25$

<sup>(1)</sup>En este caso tomamos la altura verdadera del astro y le aplicamos la reducción al último horizonte. Esto es debido a que las tomas no son totalmente simultáneas, y lo hacemos a modo de traslado de una al instante de la otra. A diferencia del método en el que se introdujo esta corrección, no aplicamos solo la corrección por refracción sino todas las que corresponden ya que en este caso no se utilizan las bisectrices de altura y no se anularía ese error sistemático.

<sup>(2)</sup>Al ser la última medida, aquí no es necesario aplicar esa corrección, cogemos tal cual la altura verdadera.

En primer lugar debemos dibujar la esfera celeste tal como la vemos en la *figura 41*, con sus ejes verticales y horizontales y trazar el ecuador. Se sitúa en el meridiano de Greenwich (1). Es muy importante colocar este en la posición que más cómoda nos resulte para ubicar los astros en la esfera, ya que podemos ponerlo donde queramos. El siguiente paso es ubicar los astros. Para ello hacemos uso de los  $hG$  de cada uno que nos proporciona el Almanaque Náutico sabiendo la hora UTC de la toma de la medida (2). Para ello, como ya he dicho, los ubicamos de forma aproximada, intentando respetar al máximo las proporciones entre ellos. Sobre este círculo horario del astro podemos trazar la  $\delta$  (3) y así ya los tenemos ubicados. Tenemos entonces Fomalhaut (4) y Vega (5).

A continuación, con la esfera dibujada y los astros ubicados, ya podemos trazar las circunferencias de alturas iguales de ambos astros (6), cuyo radio será la distancia zenital, es decir, el complementario a la altura verdadera de los astros:

Fomalhaut =  $54^{\circ} 31.7'$

Vega =  $44^{\circ} 01.4'$

Podemos observar cómo estas tienen 2 puntos de intersección. Estamos situados sobre uno de esos puntos. Si las proporciones están bien hechas, y tenemos una idea de cuál es nuestra situación, no será difícil descartar una de ellas ya que estarán a distancias muy lejanas. En cualquier caso, la problemática es tan sencilla de solventar como ubicar el tercer astro y trazar su circunferencia de alturas iguales. El punto donde coincidan las 3 o donde estén más cerca de hacerlo será el punto a considerar.

Una vez sabemos cuál es nuestro punto de intersección, que corresponde con nuestro zenit (7), debemos trazar las diferentes líneas para formar el triángulo, ya que tenemos ahora todos sus vértices.

Del zenit a los astros corresponde a las distancias zenitales (8), de los astros al polo norte las co-declivaciones (9), entre ambos astro la distancia ortodrómica que los separa (10) y del zenit al polo nuestra co-latitud (11). Además también necesitaremos el arco de ecuador que separa ambos astros, que lo conocemos ya que es la diferencia de hG de estos (12).

Podemos ver claramente que ya tenemos una de las incógnitas a resolver, que es la co-latitud, de donde podremos obtener directamente nuestra latitud. La longitud la obtendremos del ángulo entre uno de los astros y nuestro cenit, que se corresponde al polo de astro (13). Si conoces la distancia entre el meridiano de Greenwich y el astro, y conoces la distancia del astro al zenit, podemos conocer fácilmente la distancia del meridiano de Greenwich a nuestro zenit. Y esto es nuestra longitud.

Con todos los datos claros y sabiendo las incógnitas, podemos proceder a resolver el triángulo con el método de los cosenos. Podemos ver que tenemos una pirámide compuesta por 4 triángulos esféricos. Pues bien, nos centraremos en su resolución uno por uno. Para poder resolverlos cada uno de ellos, es necesario o bien conocer todos sus lados, o 2 lados y un ángulo.

Para facilitar la formulación y resolución se ha asignado a cada uno de los datos una letra, que es la que se usará en las fórmulas. Es importante usar tantos decimales como nos permita la calculadora para mejorar la precisión en el resultado.

#### Triángulo Vega-Fomalhaut-Polo Norte

Es el único que cumple el requisito citado anteriormente. De este triángulo podremos despejar la distancia ortodrómica entre los astros Do.

$$\cos Do = \cos A * \cos B + \sin A * \sin B * \cos C \quad \text{resolviendo } Do = 92.90332207$$

Ahora, ya que en ningún otro triángulo tenemos ningún ángulo, debemos interpretar uno de los vértices para así poder obtener el ángulo de otro de los triángulos. Se puede coger cualquiera de los vértices de los astros, y en este caso se opta por el de Vega. EL vértice está formado por los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  y el que atañe a este triángulo es  $\alpha$ . Por tanto:

$$\cos B = \cos A * \cos Do + \sin A * \sin Do * \cos \alpha \quad \text{despejando, } \alpha = 126.3359613$$

Se puede interpretar fácilmente, gracias al dibujo, que  $\alpha = \mu + \beta$ , y como ahora hemos obtenido el valor de Do, tenemos todo los lados del siguiente triángulo a resolver.

#### Triángulo Vega-Fomalhaut-Zenit

Como conocemos todos sus lados, podemos calcular el ángulo  $\mu$ :

$$\cos Y = \cos X * \cos Do + \sin X * \sin Do * \cos \mu \quad \text{despejando, } \mu = 27.30630069$$

Como se ha dicho anteriormente,  $\alpha = \mu + \beta$ , por tanto,  $\beta = \alpha - \mu$ ;  $\beta = 99.02966051$

Con estos datos, podemos resolver el ultimo triángulo que nos interesa.

#### Triángulo Vega-Zenit-Polo Norte

En este caso, tenemos 2 lados y un ángulo. Tenemos también en este caso las 2 incógnitas del ejercicio. Primero procedemos a calcular  $c\varphi$ :

$$\cos c\varphi = \cos X * \cos A + \sin X * \sin A * \cos \beta \quad \text{resolviendo, } c\varphi = 68.55330411$$

Por último calculamos P:

$$\cos X = \cos A \cos c\varphi + \sin A * \sin c\varphi * P \quad \text{despejando, } P = 47.5106924$$

Podemos deducir interpretando el dibujo que se trata de un polo al W. por tanto  $hL_{\text{vega}} = P$ . Así pues, de  $hL^* = hG^* + L$  deducimos que  $L = hL^* - hG^*$

$L = 47.5106924 - 66.70416667 = -19.19347427$  al ser negativo es al W.

$\varphi = 90 - c\varphi$ ;  $\varphi = 90 - 68.5533041 = 21.44669589$  positivo N

Nuestra posición es  $\varphi = 21^\circ 26.7' \text{ N}$   $L = 019^\circ 11.6' \text{ W}$  que en comparación con la posición que nos da el GPS nos da un error de 4.72 millas.

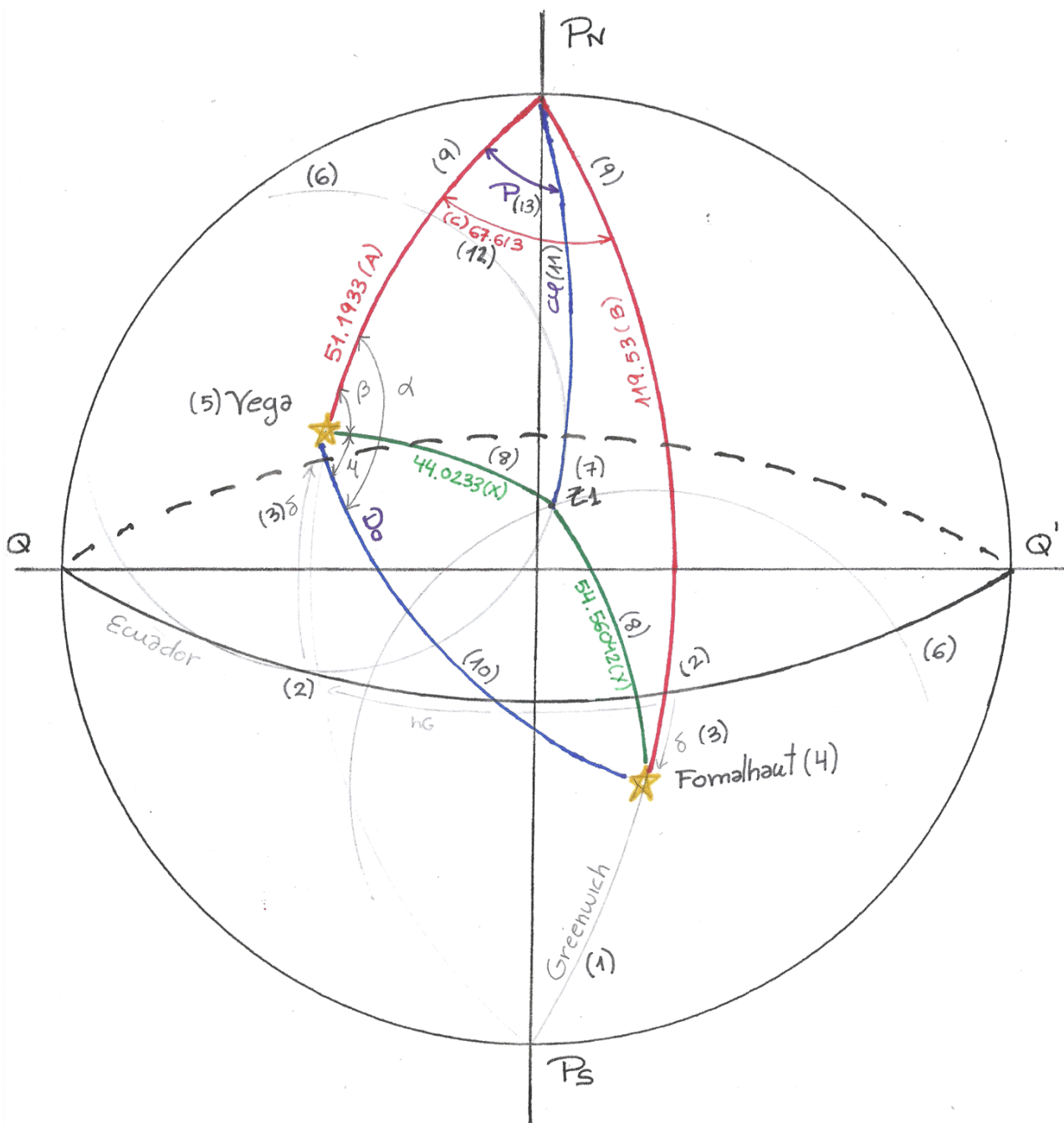


Figura 41. Esquema para su resolución con el método de Doves (propia)



## 7.2 EJERCICIO 1

A 21/11/2017 19:04:04 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^\circ 00' N$   $L = 019^\circ 00' W$  tomamos  $a_i$  de Vega  $45^\circ 30.5'$  y  $Z_v = 310^\circ$ . Seguimos navegando con  $R_v = 058.8^\circ$  y a 8 nudos hasta las 19:07:59 UTC donde tomamos  $a_i$  de Altair  $57^\circ 59.2'$  y  $Z_v = 250^\circ$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:11:03 tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $36^\circ 59.2'$  y  $Z_v = 168^\circ$ .

Fomalhaut

$$\delta = -29^\circ 31.8'$$

$$a_{vc} = 36^\circ 50.9'$$

$$hG^* = 004^\circ 04.7'$$

Vega

$$\delta = 38^\circ 48.4'$$

$$a_{vc} = 45^\circ 22.1'$$

$$hG^* = 067^\circ 36.4'$$

Los valores de las circunferencias de alturas iguales son: Fomalhaut=  $53^\circ 09.1'$  y Vega=  $44^\circ 37.9'$

$$\cos Do = \cos A * \cos B + \sin A * \sin B * \cos C \quad Do = 90.38080588$$

$$\cos B = \cos A * \cos Do + \sin A * \sin Do * \cos \alpha \quad \alpha = 128.8409921$$

$$\cos Y = \cos X * \cos Do + \sin X * \sin Do * \cos \mu \quad \mu = 30.64312196$$

$$\alpha = \mu + \beta, \text{ por tanto, } \beta = \alpha - \mu; \quad \beta = 98.19787014$$

$$\cos c\varphi = \cos X * \cos A + \sin X * \sin A * \cos \beta \quad c\varphi = 68.4129361$$

$$\cos X = \cos A \cos c\varphi + \sin A * \sin c\varphi * P \quad P = 48.40188491$$

Podemos deducir interpretando el dibujo que se trata de un polo al W. por tanto  $hL_{\text{vega}} = P$ . Así pues, de  $hL^* = hG^* + L$  deducimos que  $L = hL^* - hG^*$

$$L = 48.40188491 - 67.60666667 = -19.20478176 \text{ al ser negativo es al W.}$$

$$\varphi = 90 - c\varphi; \varphi = 90 - 68.4129361 = 21.5870639 \text{ positivo N}$$

Nuestra posición es  $\varphi = 21^\circ 35.2' N$   $L = 019^\circ 12.3' W$  que en comparación con la posición que nos da el GPS nos da un error de 8.40 millas.

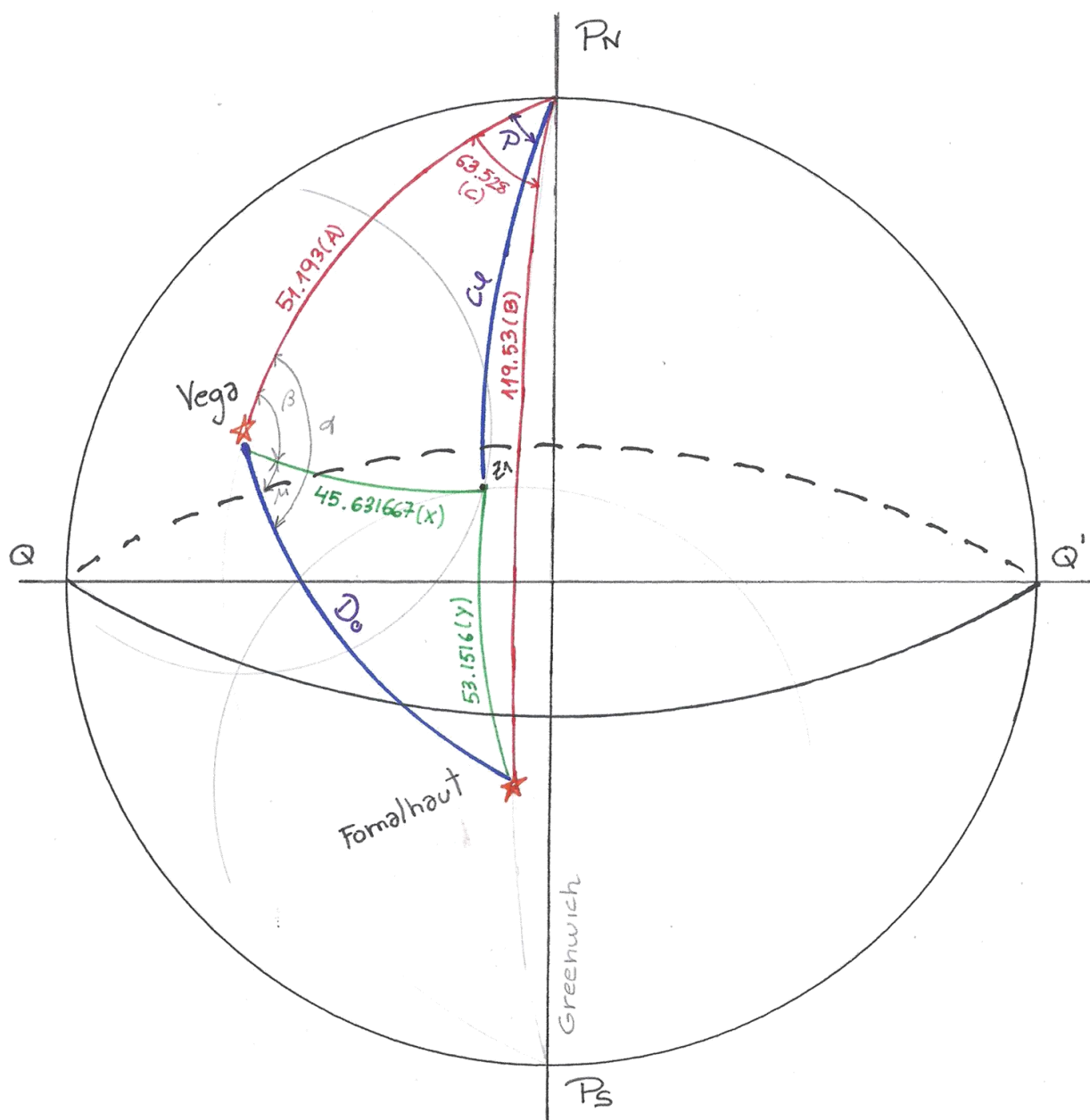


Figura 42. Esquema para la resolución del ejercicio 1 con el método de Doves (propia)

### 7.3 EJERCICIO 2

A 20/11/2017 18:58:03 UTC en situación estimada  $\varphi = 22^\circ 00' N$   $L = 019^\circ 30' W$  tomamos  $a_i$  de la Luna  $16^\circ 06.6'$  y  $Z_v = 238^\circ$ . Seguimos navegando con  $R_v = 054.9^\circ$  y a 4.4 nudos hasta las 19:09:30 UTC donde tomamos  $a_i$  de Deneb  $62^\circ 07.6'$  y  $Z_v = 320^\circ$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:14:16 tomamos  $a_i$  de Hamal  $32^\circ 48.6'$  y  $Z_v = 075^\circ$ .

#### Deneb

$$\delta = +62^\circ 00.1'$$

$$a_{vc} = 45^\circ 21.0'$$

$$hG^* = 036^\circ 51.3'$$

#### Hamal

$$\delta = +23^\circ 32.8'$$

$$a_{vc} = 32^\circ 40.0'$$

$$hG^* = 316^\circ 30.36'$$

Los valores de las circunferencias de alturas iguales son: Deneb=  $44^\circ 39.0'$  y Hamal=  $57^\circ 20.0'$

$$\cos Do = \cos A * \cos B + \sin A * \sin B * \cos C \quad Do = 66.9075536$$

$$\cos B = \cos A * \cos Do + \sin A * \sin Do * \cos \beta \quad \beta = 79.26014913$$

$$\cos Y = \cos X * \cos Do + \sin X * \sin Do * \cos \mu \quad \mu = 63.38766133$$

$$\alpha = \mu + \beta, \text{ por tanto} \quad \alpha = 142.6478105$$

$$\cos c\varphi = \cos X * \cos A + \sin X * \sin A * \cos \alpha \quad c\varphi = 68.53737776$$

$$\cos X = \cos A \cos c\varphi + \sin A * \sin c\varphi * P \quad P = 17.82078812$$

Podemos deducir interpretando el dibujo que se trata de un polo al W. por tanto  $hL_{\text{Deneb}} = P$ . Así pues, de  $hL^* = hG^* + L$  deducimos que  $L = hL^* - hG^*$

$$L = 17.82078812 - 36.855 = -19.03421188 \text{ al ser negativo es al W.}$$

$$\varphi = 90 - c\varphi; \varphi = 90 - 68.53737776 = 21.46262224 \text{ positivo N}$$

Nuestra posición es  $\varphi = 21^\circ 27.76' N$   $L = 019^\circ 02.05' W$  que en comparación con la posición que nos da el GPS nos da un error de 4.40 millas.

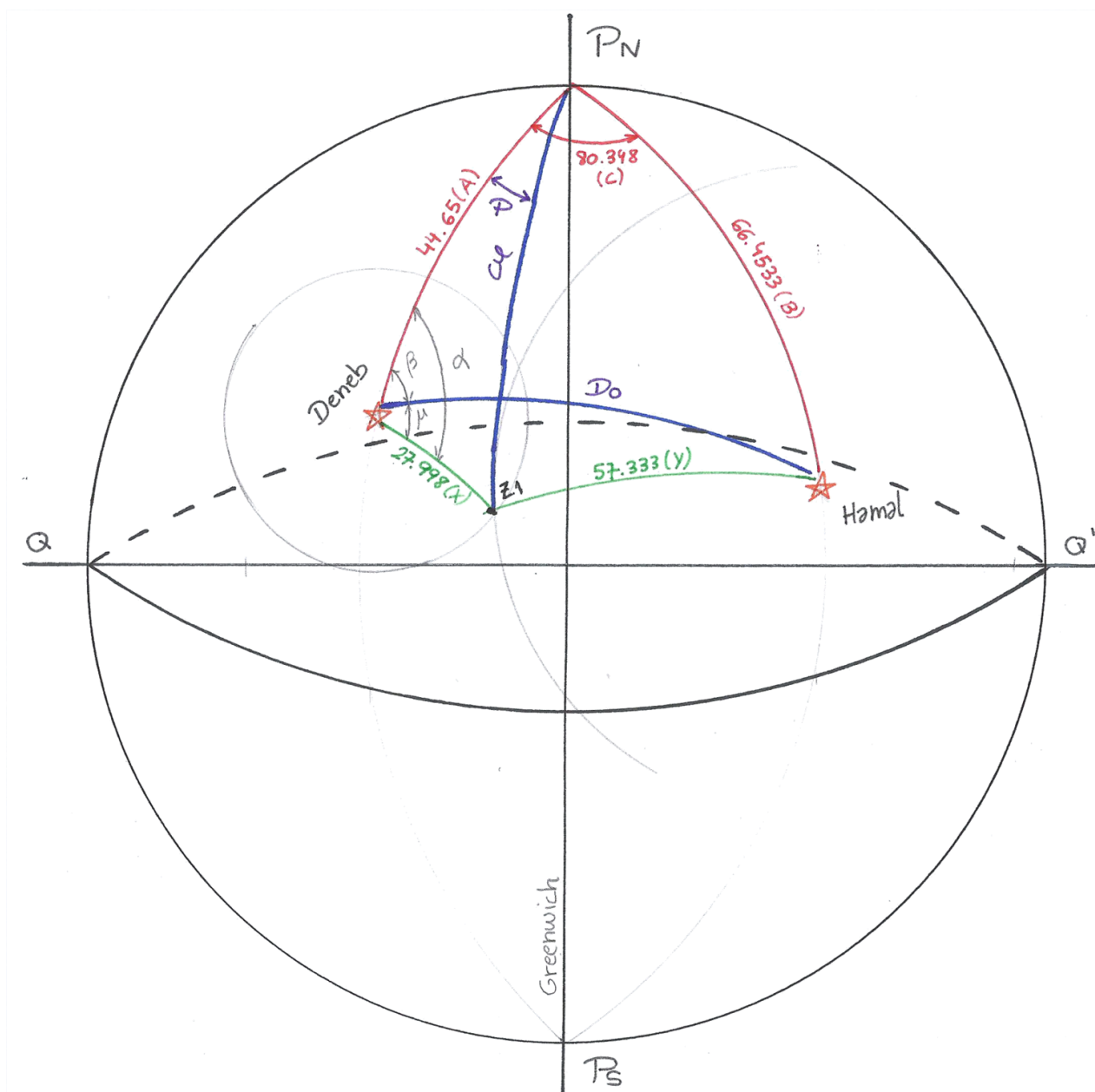


Figura 43. Esquema para la resolución del ejercicio 2 con el método de Dowes (propia)

### 7.4 EJERCICIO 3

A 07/11/2017 19:07:16 UTC en situación estimada  $\varphi = 22^\circ 00' N$   $L = 020^\circ 00' W$  tomamos  $a_i$  de Deneb  $66^\circ 02.7'$  y  $Zv = 357^\circ$ . Seguimos navegando con  $Rv = 327^\circ$  y a 8 nudos hasta las 19:09:54 UTC donde tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $31^\circ 43.6'$  y  $Zv = 147^\circ$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:22:41 tomamos  $a_i$  de Altair  $66^\circ 32.6'$  y  $Zv = 230^\circ$ .

#### Fomalhaut

$$\delta = -29^\circ 31.8'$$

$$a_{vc} = 31^\circ 33.6903'$$

$$hG^* = 349^\circ 59.4'$$

#### Altair

$$\delta = +08^\circ 55.2'$$

$$a_{vc} = 66^\circ 25.6'$$

$$hG^* = 039^\circ 56.6'$$

Los valores de las circunferencias de alturas iguales son: Fomalhaut=  $56^\circ 18.35'$  y Altair=  $23^\circ 34.4'$

$$\cos Do = \cos A * \cos B + \sin A * \sin B * \cos C \quad Do = 61.53404155$$

$$\cos B = \cos A * \cos Do + \sin A * \sin Do * \cos \alpha \quad \alpha = 130.7398081$$

$$\cos Y = \cos X * \cos Do + \sin X * \sin Do * \cos \mu \quad \mu = 75.74794837$$

$$\alpha = \mu + \beta, \text{ por tanto, } \beta = \alpha - \mu; \quad \beta = 54.99185973$$

$$\cos c\varphi = \cos X * \cos A + \sin X * \sin A * \cos \beta \quad c\varphi = 68.35999964$$

$$\cos X = \cos A \cos c\varphi + \sin A * \sin c\varphi * P \quad P = 20.63432185$$

Podemos deducir interpretando el dibujo que se trata de un polo al W. por tanto  $hL_{Altair} = P$ . Así pues, de  $hL^* = hG^* + L$  deducimos que  $L = hL^* - hG^*$

$L = 20.63432185 - 39.94333333 = -19.30901149$  al ser negativo es al W.

$\varphi = 90 - c\varphi$ ;  $\varphi = 90 - 68.35999964 = 21.64000036$  positivo N

Nuestra posición es  $\varphi = 21^\circ 38.40' N$   $L = 019^\circ 18.5' W$  que en comparación con la posición que nos da el GPS nos da un error de 4.9 millas.



### 7.5 EJERCICIO 4

A 19/11/2017 y con el buque parado en DP a las 19:03:34 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^\circ 00' N$   $L = 019^\circ 00' W$  tomamos  $a_i$  de Vega  $47^\circ 07.7'$  y  $Zv = 305^\circ$ . A las 19:08:27 UTC tomamos  $a_i$  de Fomalhaut  $36^\circ 27.6'$  y  $Zv = 165^\circ$  y a las 19:16:21 tomamos  $a_i$  de Hamal  $31^\circ 54.7'$  y  $Zv = 080^\circ$ .

Fomalhaut

$$\delta = -29^\circ 31.8'$$

$$a_{vc} = 36^\circ 19.3'$$

$$hG^* = 001^\circ 27.3'$$

Hamal

$$\delta = +23^\circ 32.8'$$

$$a_{vc} = 31^\circ 46.4'$$

$$hG^* = 316^\circ 02.6'$$

Los valores de las circunferencias de alturas iguales son: Fomalhaut =  $53^\circ 40.7'$  y Hamal =  $58^\circ 13.6'$

$$\cos Do = \cos A * \cos B + \sin A * \sin B * \cos C \quad Do = 68.71219924$$

$$\cos B = \cos A * \cos Do + \sin A * \sin Do * \cos \alpha \quad \alpha = 138.3151584$$

$$\cos Y = \cos X * \cos Do + \sin X * \sin Do * \cos \mu \quad \mu = 59.57455889$$

$$\alpha = \mu + \beta, \text{ por tanto } \beta = \alpha - \mu \quad \beta = 78.74059953$$

$$\cos c\varphi = \cos X * \cos A + \sin X * \sin A * \cos \alpha \quad c\varphi = 68.74447635$$

$$\cos X = \cos A \cos c\varphi + \sin A * \sin c\varphi * P \quad P = 63.46156825$$

Podemos deducir interpretando el dibujo que se trata de un polo al E. por tanto  $h_{L_{Hamal}} = 360 - P$ ;  $hL = 296.5384318$  Así pues, de  $hL^* = hG^* + L$  deducimos que  $L = hL^* - hG^*$

$L = 296.5384318 - 316.0433333 = -19.50490158$  al ser negativo es al W.

$\varphi = 90 - c\varphi$ ;  $\varphi = 90 - 68.74447635 = 21.25552365$  positivo N

Nuestra posición es  $\varphi = 21^\circ 15.3' N$   $L = 019^\circ 30.3' W$  que en comparación con la posición que nos da el GPS nos da un error de 2.66 millas.

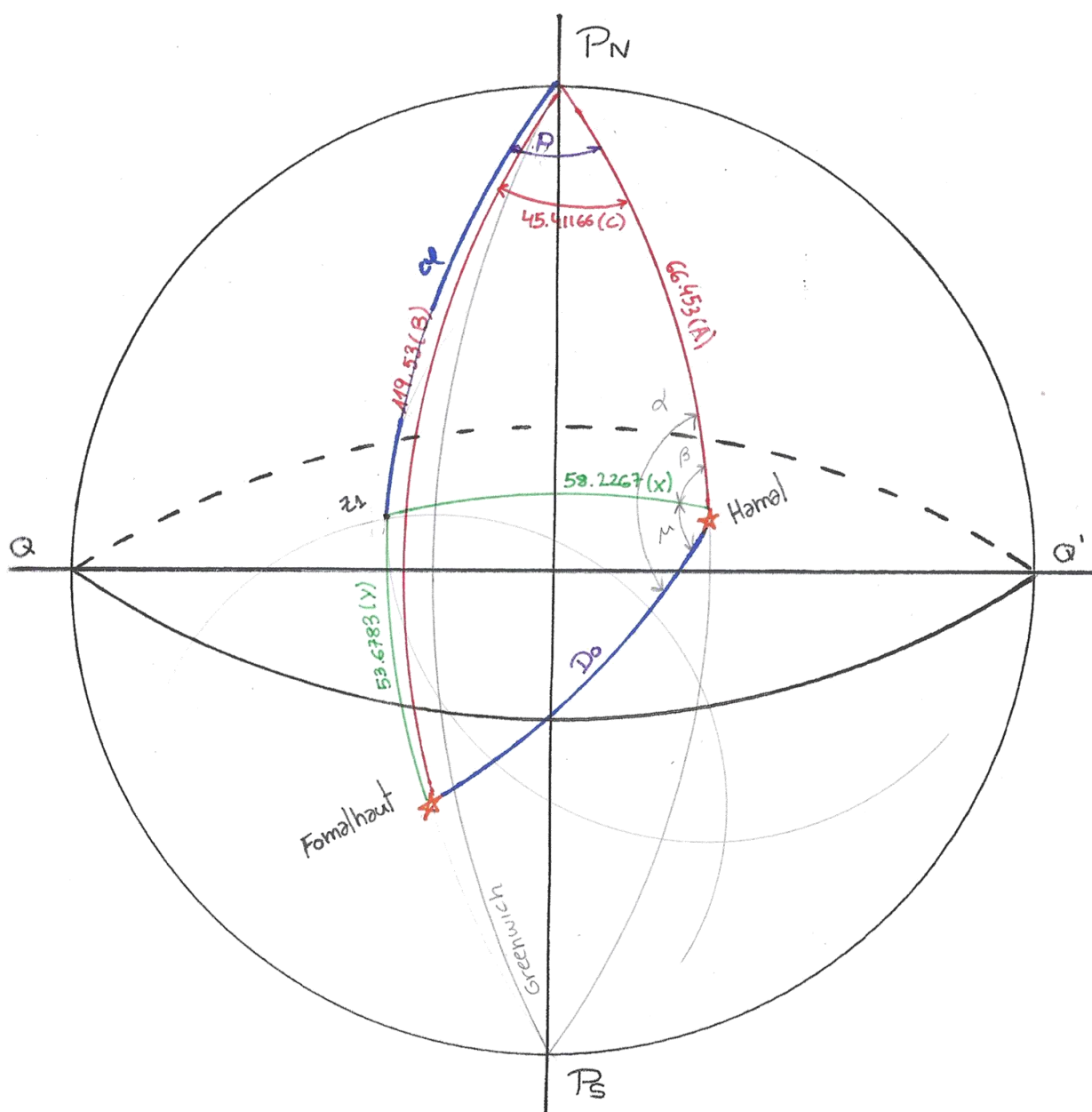


Figura 45. Esquema para la resolución del ejercicio 4 con el método de Doves (propia)



## 7.6 EJERCICIO 5

A 08/11/2017 19:06:41 UTC en situación estimada  $\varphi = 21^\circ 30' N$   $L = 019^\circ 00' W$  tomamos  $a_i$  de Vega  $54^\circ 31.2'$  y  $Zv = 305^\circ$ . Seguimos navegando con  $Rv = 147.7^\circ$  y a 7.9 nudos hasta las 19:10:07 UTC donde tomamos  $a_i$  de Altair  $68^\circ 29.8'$  y  $Zv = 265^\circ$ . Con el mismo rumbo y velocidad, a las 19:15:22 tomamos  $a_i$  de Diphda  $24^\circ 49.5'$  y  $Zv = 110^\circ$ .

### Altair

$$\delta = +08^\circ 55.2'$$

$$a_{vc} = 68^\circ 22.3'$$

$$hG^* = 037^\circ 46.75'$$

### Diphda

$$\delta = -17^\circ 53.4'$$

$$a_{vc} = 24^\circ 40.3'$$

$$hG^* = 325^\circ 52.9'$$

Los valores de las circunferencias de alturas iguales son: Altair =  $21^\circ 37.7'$  y Diphda =  $65^\circ 19.7'$

$$\cos Do = \cos A * \cos B + \sin A * \sin B * \cos C \quad Do = 75.8483015$$

$$\cos B = \cos A * \cos Do + \sin A * \sin Do * \cos \alpha \quad \alpha = 111.1160398$$

$$\cos Y = \cos X * \cos Do + \sin X * \sin Do * \cos \mu \quad \mu = 57.8583069$$

$$\alpha = \mu + \beta, \text{ por tanto } \beta = \alpha - \mu \quad \beta = 53.2577329$$

$$\cos c\varphi = \cos X * \cos A + \sin X * \sin A * \cos \alpha \quad c\varphi = 68.77907921$$

$$\cos X = \cos A \cos c\varphi + \sin A * \sin c\varphi * P \quad P = 18.47216932$$

Podemos deducir interpretando el dibujo que se trata de un polo al W. por tanto  $hL_{Deneb} = P$ . Así pues, de  $hL^* = hG^* + L$  deducimos que  $L = hL^* - hG^*$

$$L = 18.47216932 - 37.77916667 = -19.30699735 \text{ al ser negativo es al W.}$$

$$\varphi = 90 - c\varphi; \varphi = 90 - 68.77907921 = 21.22092079 \text{ positivo N}$$

Nuestra posición es  $\varphi = 21^\circ 13.31' N$   $L = 019^\circ 18.4' W$  que en comparación con la posición que nos da el GPS nos da un error de 3.40 millas.



## Capítulo 8. Comparativa y conclusiones

	Tang. Saint Hilaire	R. diferenciométricas	Dowes
Ejercicio exp.	2.07	1.52	4.72
Ejercicio 1	4.15	1.58	8.40
Ejercicio 2	1.99	3.99	4.40
Ejercicio 3	1.66	1.36	4.90
Ejercicio 4	1.68	0.53	2.66
Ejercicio 5	1.18	1.10	3.48
Valor medio	<b>2.12</b>	<b>1.68</b>	<b>4.76</b>

Todos los valores de los errores en la posición provienen de la comparación del resultado del ejercicio con la posición que nos daba el GPS del buque cuando se realizaron estas. Obviamente, cuando se realizaron las mediciones de los astros durante la navegación si se conocía la posición real del buque, por lo que la situación de estima era inventada. Tal y como se ha visto durante el trabajo inventarse la situación de estima, siempre y cuando sea un valor razonable, no conlleva ningún problema.

Con el método de tangentes de rectas de altura Saint Hilaire, todos tienen un valor similar excepto el valor de 4.15. Este es el único ejercicio que no se ha hecho con el método de las bisectrices de altura sino que se toma el centro geométrico del triángulo. Esto es debido a que había una diferencia de altura inferior de 60 grados. Posiblemente este error notablemente superior a los demás sea debido a este motivo y también a un error accidental en la toma de las medidas superior a los demás.

Con el método de las rectas diferenciométricas, destacan 2 valores sobre los demás. En primer lugar, el valor de 3.99 es en el único ejercicio en el que no se tomaron únicamente estrellas sino que este incluye la Luna. En la tesis doctoral en la que aparece este método en ningún momento se tratan ejercicios que no sean únicamente con estrellas. Es posible que el uso de la Luna no sea recomendado para este método y solo funcione con estrellas. En el caso del error con valor de 0.53, el buque se encontraba parado en DP. En este caso el error accidental es prácticamente inexistente y el método (que recordemos que elimina al mínimo el error sistemático) es más efectivo.

Con el método de Dowes, encontramos el valor el 8.40 que destaca notablemente. Esto puede ser debido a un error en la toma de las mediciones (errores accidentales), ya que esto no se refleja en el método de las rectas diferenciométricas pero, como ya hemos visto antes, si en el método Saint Hilaire. El valor de 2.66 puede deberse, nuevamente, a que el buque estaba parado y los errores accidentales son mínimos.

Podemos tomar una conclusión global de todos los métodos fijándonos en los valores medios obtenidos de los errores en el resultado. El método que nos da más precisión, como era de esperar, es el de las rectas diferenciométricas tangentes, ya que fue inventado precisamente con ese propósito de reducir los errores al mínimo. En segundo lugar tenemos al método tradicional de tangentes de rectas de altura

Sainth Hilaire y, por último, el Método de Dowes. Este último también era de esperar ya que se obtiene sin ninguna estima previa.

En cuanto a su sencillez a la hora de los cálculos, el más pesado y largo es con diferencia el método tradicional. El método de las rectas diferenciométricas tangentes con 3 astros no resulta un ejercicio muy largo. No obstante, si se utilizan 4, al tener que emparejarlos todos con todos, obtenemos 6 pares de astros. El cálculo de sus 6 determinantes ya es un trabajo más laborioso. Por otro lado, el más simple es el método de Dowes una vez se domina. La representación gráfica no es más que una ayuda, y el ejercicio es realmente aplicar 5 veces el teorema del coseno, tarea que no lleva más que unos pocos minutos.

En realidad, el Método de Dowes lo podríamos considerar como un “GPS astronómico”. Si pudiéramos tomar las alturas de los astros en exactamente el mismo instante de tiempo, y con una precisión de diez, e hiciésemos los cálculos con un ordenador que nos permitiese tantos decimales como fuese requerido, el resultado debería ser como el del GPS de a bordo. Pero como esto nunca es así, los errores serán habitualmente grandes. Por ello es de vital importancia tomar las medidas con precisión y ser rigurosos en el cálculo, tomando el mayor número de decimales posible. Además, también es recomendable mantener el sextante en óptimas condiciones, ajustándolo siempre que sea posible tal y como hemos visto en este trabajo. No obstante, para ser un método sin estima previa, un valor de 4.7 millas de precisión en medio del Océano Atlántico se puede considerar una precisión excelente.

Si no se tiene idea alguna de donde se encuentra uno en medio del océano, una buena forma de ubicarse es usar el método de Dowes para obtener una primera situación de estima y luego afinarla más con el método de las rectas diferenciométricas tangentes.

Es muy recomendable, para cualquiera de los métodos, tener una planificación de los astros que se tomarán ya que solo se tiene una media hora para la medición de estos, entre el crepúsculo civil y el náutico. No obstante, con los 2 primeros métodos y gracias a la situación de estima previa, se puede no saber que astros se toma y hacer un reconocimiento de los mismos mediante cálculos. Esto no es así en el método de Dowes. Al no tener una situación de estima, no es posible el reconocimiento. Por tanto es imprescindible un conocimiento del firmamento para saber que astros estamos tomando y poder tomar los datos necesarios del Almanaque Náutico.

En definitiva, si nos encontramos en medio del océano, cualquiera de los 3 métodos nos dará una precisión más que aceptable. Tenemos la ventaja de que, si bien es una buena práctica, por no decir imprescindible (por muchos sistemas electrónicos que tengamos), llevar siempre una navegación de estima, siempre tendremos el comodín del método de Dowes que nos dirá dónde estamos si navegamos completamente perdidos.

## Bibliografía

- [1] García, José M. *Circunferencia de alturas iguales*.
- [2] José V. Pascual Gil. *Navegación Astronómica para la Navegación Deportiva*. [en línea] (Consulta: 12 de Febrero de 2018). Disponible en:  
<http://www.olajedatos.com/documentos/Navegaci%F3n%20Astron%F3mica%20%20Libro.pdf>
- [3] López Varela. *Navegación II*
- [4] Mederos, Luis. *Navegación Astronómica*. 6ª edición. Madrid. Tutor 2016. 978-84-16676-08-8
- [5] Mederos, Luis. Rodamedia [en línea] Junio 2001. (Consulta: 12 de Febrero de 2018) Disponible en: <http://rodamedia.com/>
- [6] Nathaniel Bowditch. *The American Practical Navigator* [en línea] (Consulta: 25 de Febrero de 2018) Disponible en:  
[http://geocenter.survey.ntua.gr/main/labs/carto/academic/persons/bnakos\\_site\\_nafp/docume ntation/american\\_practical\\_navigator.pdf](http://geocenter.survey.ntua.gr/main/labs/carto/academic/persons/bnakos_site_nafp/docume ntation/american_practical_navigator.pdf)
- [7] Pita Porta, Antonio. *La hipérbola esférica en la navegación astronómica recta diferenciométrica verdadera naturaleza de la bisectriz de altura* [en línea] (Consulta: 2 de Abril de 2018) Disponible en:  
<http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:2rfckM9SxdkJ:ruc.udc.es/dspace/handle/2183/10100%3Flocale-attribute%3Des+&cd=2&hl=es&ct=clnk&gl=es>
- [8] Teorema del Coseno [en línea] (Consulta: 20 de Marzo de 2018) Disponible en:  
[https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_del\\_coseno](https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_del_coseno)
- [9] Umland, Henning; Coll, Lorenç; Stockfleth, Wolfpeter. *Breve introducción a la navegación astronómica*. [en línea] (Consulta: 25 de Marzo de 2018) Disponible en:  
<https://www.estudiosonavegas.com/images/Archivos/NavAvanzada/Umland%20Compl%20Sp%20042006.pdf>